УНИВЕРЗИТЕТ ОДБРАНЕ

Мирко Ковачевић

Јуриј-Архимед Курепа

Зоран Максимовић

ЗБИРКА ЗАДАТАКА

ИЗ

МАТЕМАТИКЕ

ЗА ПРИПРЕМУ ПРИЈЕМНОГ ИСПИТА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ЗА УПИС НА ВОЈНУ АКАДЕМИЈУ

ВОЈНА АКАДЕМИЈА

Београд, 2016

Садржај

Предговор

Ова збирка је пре свега намењена за припрему полагања пријемног испита из Математике за будуће кадете Војне академије. Потреба за писањем овакве збирке настала је из чињенице што се кандидати за кадете Војне академије пријављују из свих крајева Србије, БиХ па и из Црне Горе, и уочили смо да кандидати не долазе са приближно истим знањем математике из средње школе. Из тог разлога првенствени циљ је био да ова збирка обухвати све целине које су неопходне за самосталан рад и успешно полагање пријемног испита из Математике.

Велики број задатака је у потпуности и поступнно решен из сваке целине, а такође је дат велики број задатака са решењима за самосталан рад. Пре решавања задатака уз сваку целину дата су неопходна теоретска објашњена и формуле ради лакшег разумевања и решавања задатака.

У другом делу збирке, потпуно су решени задаци са пријемних испита одржаних на Војној академији у последњих неколико година.

Велики допринос квалитету ове збирке дали су редовни професор Павле Младеновић и ванредни професор Зорица Станимировић, професори Математичког факултета у Београду и зато им захваљујемо на уложеном труду и сугестијама.

У Београду,

Аутори

Део I

Преглед појмова и формула из елементарне математике

1 Скупови. Бројеви

1.1 Реални бројеви

Скуп реалних бројева се означава са $\mathbb{R}$. Његови најважнији подскупови су:

Скуп природних бројева у ознаци $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$,

Скуп целих бројева у ознаци $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$,

Скуп рационалних бројева у ознаци $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} | m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N}\right\}$,

Скуп ирационалних бројева у ознаци $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Ако су $a, b \in \mathbb{R}$ где је $a < b$ могу се дефинисати интервали:

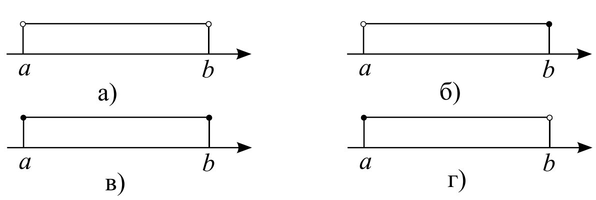
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ отворени интервал (Сл. 1а),

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$ интервал затворен са десне стране (Сл.1б),

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ затворени интервал или сегмент (Сл.1в),

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$ интервал затворен са леве стране (Сл.1г),

$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ скуп реалних бројева.



Сл. 1: Приказ интервала на бројној правој

Бесконачни периодични децимални број са периодом $c_1c_2\dots c_p$ пишемо у облику

$$a_1a_2\cdots a_m, b_1b_2\dots b_nc_1c_2\dots c_pc_1c_2\dots c_p\dots =$$

$$= a_1a_2\cdots a_m, b_1b_2\dots b_n(c_1c_2\dots c_p),$$

где су $a_i, b_j, c_k \in \{0,1,2,\dots,9\}$.
Разломак коме је именилац јединица са једном или више нула називамо децималним разломком.
$\frac{3}{10} = 0,3$; $\frac{121}{10} = 12,1$; $\frac{7}{100} = 0,07$; $\frac{137}{10000} = 0,0137$ итд.

Решени задаци

1. Израчунати изразе:
   а) $1\frac{7}{20} : 2,7 + 2,7 : 1,35 + \left(4,2 - 1\frac{3}{40}\right) \cdot 0,4 : 2\frac{1}{2}$;
   б) $3\frac{3}{4} : 7\frac{1}{2} - 5,25 : 10 + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) : 0,2$.

Решење: Изразе израчунавамо тако што све бројеве записујемо у облику разломака и након тога сређујемо добијени израз:

а) $1\frac{7}{20} : 2,7 + 2,7 : 1,35 + \left(4,2 - 1\frac{3}{40}\right) \cdot 0,4 : 2\frac{1}{2} =$
$= \frac{27}{20} \cdot \frac{10}{27} + \frac{270}{100} \cdot \frac{100}{135} + \left(\frac{42}{10} - \frac{43}{40}\right) \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{2}{5} =$
$= \frac{1}{2} + 2 + \frac{168-43}{40} \cdot \frac{4}{25} =$
$= \frac{5}{2} + \frac{125}{40} \cdot \frac{4}{25} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3.$

б) $3\frac{3}{4} : 7\frac{1}{2} - 5,25 : 10 + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) : 0,2 =$
$= \frac{15}{4} : \frac{15}{2} - \frac{21}{4} : \frac{21}{2} + \frac{1}{10} : \frac{2}{10} =$
$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

2. Пронаћи x из пропорције

$$\frac{x}{0,0016 : 0,012 + 0,7} = \frac{4\frac{54}{25} : 14\frac{7}{5} + 0,8}{1,2 : 0,375 - 0,2}.$$

Решење: Дата пропорција је еквивалентна следећим једнакостима:

$\frac{x}{0{,}0016:0{,}012+0{,}7} = \frac{4\frac{54}{25}:14\frac{7}{5}+0{,}8}{1{,}2:0{,}375-0{,}2}$

$\frac{x}{\frac{16}{10000}:\frac{12}{1000}+\frac{7}{10}} = \frac{\frac{154}{25}:\frac{77}{5}+\frac{8}{10}}{\frac{12}{10}:\frac{375}{1000}-\frac{2}{10}}$

$\frac{x}{\frac{16}{10000}\cdot\frac{1000}{12}+\frac{7}{10}} = \frac{\frac{154}{25}\cdot\frac{5}{77}+\frac{8}{10}}{\frac{12}{10}\cdot\frac{1000}{375}-\frac{1}{5}}$
$\frac{x}{\frac{2}{15}+\frac{7}{10}} = \frac{\frac{2}{5}+\frac{4}{5}}{\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{3}-\frac{1}{5}}$
$\frac{x}{\frac{2}{15}+\frac{7}{10}} = \frac{\frac{2}{5}+\frac{4}{5}}{\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{3}-\frac{1}{5}}$
$\frac{x}{\frac{5}{6}} = \frac{\frac{6}{5}}{3}$

$x = \frac{1}{3}.$

Задаци за вежбу

1. Израчунати вредност израза

$$\frac{\left(1,75 : \frac{2}{3} - 1,75\right) : \frac{7}{12}}{\left(\frac{17}{80} - 0,0325\right) : 400} : (6,79 : 0,7 + 0,3)\,.$$

Резултат: 250.

2. Израчунати вредност израза

$$\frac{\left(\left(40\frac{7}{30} - 38\frac{5}{12}\right) : 10,9 + \left(\frac{7}{8} - \frac{7}{30}\right) \cdot 1\frac{9}{11}\right) \cdot 4,2}{0,08}.$$

Резултат: 70.

3. Израчунати вредност израза

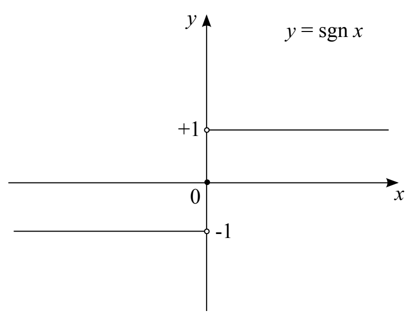
$$1\frac{7}{20} : 2,7 + 2,7 : 1,35 + \left(0,4 : 2\frac{1}{2}\right) \cdot \left(4,2 - 1\frac{3}{40}\right).$$

Резултат: $\frac{7}{2}$.

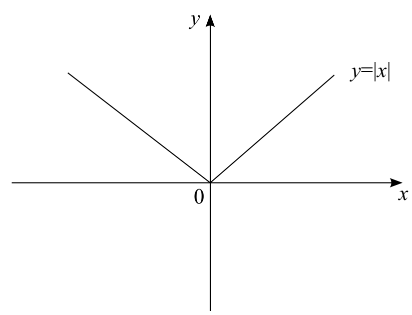
2 Операције са алгебарским изразима

У следећим задацима користићемо следеће записе, операције и функције:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases} \qquad |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases},$$



Сл. 2: График функције $y = \operatorname{sgn} x$



Сл. 3: График функције $y = |x|$

$$|x| = x \cdot \operatorname{sgn} x,$$

$$\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x, & n = 2k+1, \\ |x|, & n = 2k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N},$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b),$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2), \qquad a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2),$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Ако је $a, b > 0$, и $k, m, n \in \mathbb{Z}$ тада важи:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \qquad a^0 = 1, \qquad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}},$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}, \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \qquad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[\frac{n}{k}]{a^{\frac{m}{k}}},$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \qquad \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}.$$

Решени задаци

1. Израчунати израз:

$$\left(\frac{\left(\frac{13}{3}-1:0,3\right)^{-5}:\frac{176}{5}}{1\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{7}+\frac{2}{11}\right)}\right)^{-\frac{3}{4}}.$$

Решење: Записивањем свих бројева у облику разломка добијамо израз који даље сређујемо:

$$\left(\frac{\left(\frac{13}{3}-1:0,3\right)^{-5}:\frac{176}{5}}{1\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{7}+\frac{2}{11}\right)}\right)^{-\frac{3}{4}}=$$
$$=\left(\frac{\left(\frac{13}{3}-\frac{10}{3}\right)^{-5}\cdot\frac{5}{176}}{\frac{7}{5}\cdot\frac{25}{77}}\right)^{-\frac{3}{4}}=$$
$$=\left(\frac{\frac{5}{176}}{\frac{5}{11}}\right)^{-\frac{3}{4}}=\left(\frac{11}{176}\right)^{-\frac{3}{4}}=$$
$$=16^{\frac{3}{4}}=\left((2^4)^{\frac{1}{4}}\right)^{3}=$$
$$=2^3=8.$$

2. Израчунати израз:

$$\frac{3^8\cdot 9^{-2}\cdot 5^4+9\cdot 125\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}}{(3\cdot 5)^4\cdot 3^{-3}}:5.$$

Решење:

$$\frac{3^8\cdot 9^{-2}\cdot 5^4+9\cdot 125\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}}{(3\cdot 5)^4\cdot 3^{-3}}:5=$$
$$=\frac{3^8\cdot 3^{-4}\cdot 5^4+3^2\cdot 5^3\cdot 5}{(3\cdot 5)^4\cdot 3^{-3}}:5=$$
$$=\frac{3^4\cdot 5^4+3^2\cdot 5^4}{3\cdot 5^5}=$$
$$=\frac{3^2\cdot 5^4(3^2+1)}{3\cdot 5^5}=$$
$$=\frac{3^2\cdot 5^4\cdot 10}{3\cdot 5^5}=\frac{3^2\cdot 5^5\cdot 2}{3\cdot 5^5}=6.$$

3. Израчунати израз:

$$\left(4^{-\frac{1}{4}}+\left(\frac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)\cdot\left(4^{-0,25}-\left(2\sqrt{2}\right)^{-\frac{4}{3}}\right).$$

Решење: Коришћењем основних особина степена добијамо израз који даље сређујемо:

$$\left(4^{-\frac{1}{4}}+\left(\tfrac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)\cdot\left(4^{-0,25}-\left(2\sqrt{2}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)=$$
$$=\left(\left(2^2\right)^{-\frac{1}{4}}+\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)\cdot\left(\left(2^2\right)^{-\frac{1}{4}}-\left(2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)=$$
$$=\left(2^{2\cdot(-\frac{1}{4})}+2^{\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)}\right)\cdot\left(2^{2\cdot(-\frac{1}{4})}-\left(2^{1+\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)=$$
$$=\left(2^{-\frac{1}{2}}+2^{-2}\right)\cdot\left(2^{-\frac{1}{2}}-\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)=$$
$$=\left(2^{-\frac{1}{2}}+2^{-2}\right)\cdot\left(2^{-\frac{1}{2}}-2^{-2}\right)=$$
$$=\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^2-\left(2^{-2}\right)^2=$$
$$=2^{-1}-2^{-4}=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{16}=\tfrac{7}{16}.$$

4. Израчунати израз:

$$\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1}+\frac{4}{\sqrt{6}-2}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\right):\frac{1}{\sqrt{6}+11}$$

Решење: Израз израчунавамо тако што прво рационалишемо имениоце и тако добијени израз даље сређујемо:

$$\left(\tfrac{15}{\sqrt{6}+1}+\tfrac{4}{\sqrt{6}-2}-\tfrac{12}{3-\sqrt{6}}\right):\tfrac{1}{\sqrt{6}+11}=$$
$$=\left(\tfrac{15\left(\sqrt{6}-1\right)}{6-1}+\tfrac{4(\sqrt{6}+2)}{6-4}-\tfrac{12\left(3+\sqrt{6}\right)}{9-6}\right):\tfrac{\sqrt{6}-11}{6-121}=$$
$$=\left(3(\sqrt{6}-1)+2(\sqrt{6}+2)-4\left(3+\sqrt{6}\right)\right)\cdot\tfrac{-115}{\sqrt{6}-11}=$$
$$=\left(\sqrt{6}-11\right)\cdot\tfrac{-115}{\sqrt{6}-11}=-115.$$

5. Израчунати израз:

$$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}.$$

Решење: Као и у претходном задатку, рационалишемо имениоце и добијени израз даље сређујемо:

$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=.$

$=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=$

$=\frac{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)^2}{\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}+\frac{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)^2}{\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=$

$=\frac{\left(7-2\cdot\sqrt{7}\sqrt{5}+5\right)+\left(7+2\cdot\sqrt{7}\sqrt{5}+5\right)}{2}=$

$=\frac{24}{2}=12.$

6. Рационалисати именилац разломка

$$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}.$$

Решење: Да би рационалисали именилац неопходно је два пута применити поступак из претходног задатака:

$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=$

$=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}=$

$=\frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}$

$=\frac{5+3+2+2\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}-2\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}-2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{5+2\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}+3-2}=$

$=\frac{10+2\sqrt{15}-2\sqrt{10}-2\sqrt{6}}{6+2\sqrt{15}}=$

$=\frac{5+\sqrt{15}-\sqrt{10}-\sqrt{6}}{3+\sqrt{15}}\cdot\frac{3-\sqrt{15}}{3-\sqrt{15}}=$

$=\frac{-2\sqrt{15}+2\sqrt{6}}{9-15}=\frac{-2\sqrt{15}+2\sqrt{6}}{-6}=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{3}.$

7. Рационалисати именилац разломка

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}.$$

Решење:

$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}}=$

$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}}{2-\sqrt[3]{9}}=$

$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}}{2-\sqrt[3]{9}}\cdot\frac{4+2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{81}}{4+2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{81}}=$

$=\frac{(\sqrt{2}-\sqrt[3]{3})\cdot(4+2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{81})}{8-9}=$

$=(\sqrt[3]{3}-\sqrt{2})\cdot(4+2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{81}).$

8. Средити израз

$$\frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{a^2}{ab-b^2}+\frac{b^2}{a^2-ab}.$$

Решење: Имениоце у изразу прво факторишемо па онда сводимо на заједничке имениоце:

$\frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{a^2}{ab-b^2}+\frac{b^2}{a^2-ab}=$
$=\frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{a^2}{b(a-b)}+\frac{b^2}{a(a-b)}=$
$=\frac{\left(a^2+b^2\right)(a-b)-a^2\cdot a+b^2\cdot b}{ab(a-b)}=$
$=\frac{a^3+ab^2-ba^2-b^3-a^3+b^3}{ab(a-b)}=$
$=\frac{ab^2-ba^2}{ab(a-b)}=\frac{ab(b-a)}{ab(a-b)}=-1,$

уз услове $ab\neq 0, a\neq b$.

9. Средити израз

$$\left(\frac{(a-b)^2}{ab}+3\right)\cdot\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right):\frac{a^3-b^3}{a^2b^2}.$$

Решење:

$\left(\frac{(a-b)^2}{ab}+3\right)\cdot\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right):\frac{a^3-b^3}{a^2b^2}=$
$=\frac{a^2-2ab+b^2+3ab}{ab}\cdot\frac{a^2-b^2}{ab}\cdot\frac{a^2b^2}{a^3-b^3}=$
$=\frac{\left(a^2+ab+b^2\right)\cdot\left(a^2-b^2\right)}{a^3-b^3}=$
$=\frac{\left(a^2+ab+b^2\right)\cdot(a-b)(a+b)}{(a^2+ab+b^2)(a-b)}=$
$=a+b,$

уз услове $a\neq b$, $ab\neq 0$.

10. Средити израз

$$\left(\sqrt[\frac{2}{3}]{\frac{a\sqrt[3]{b}}{b\sqrt[8]{a^{12}}}}+\sqrt[\frac{1}{2}]{\frac{\sqrt{a}}{a\sqrt[8]{b^3}}}\right):\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right);\ a,b>0.$$

Решење:

$\left(\sqrt[\frac{2}{3}]{\frac{a\sqrt[3]{b}}{b\sqrt[8]{a^{12}}}}+\sqrt[\frac{1}{2}]{\frac{\sqrt{a}}{a\sqrt[8]{b^3}}}\right):\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)=$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{\left(ab^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(ba^{\frac{12}{8}}\right)^{\frac{3}{2}}} + \left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{ab^{\frac{3}{8}}}\right)^2 \right) : \left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right) = \\
&= \left(\frac{a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}}}{b^{\frac{3}{2}} a^{\frac{12}{8}\cdot\frac{3}{2}}} + \frac{a}{a^2 b^{\frac{3}{8}\cdot 2}} \right) : \left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right) = \\
&= \left(\frac{a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{3}{2}} a^{\frac{9}{4}}} + \frac{a}{a^2 b^{\frac{3}{4}}} \right) : \left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right) = \\
&= \left(\frac{1}{ba^{\frac{3}{4}}} + \frac{1}{ab^{\frac{3}{4}}} \right) : \left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right) = \\
&= \left(\frac{a^{\frac{1}{4}}}{ba} + \frac{b^{\frac{1}{4}}}{ab} \right) : \left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{ab}.
\end{aligned}
$$

11. Средити израз:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}} \right) : \left(1 + \sqrt{\frac{a+1}{a-1}} \right).$$

Решење: Задатак има смисла ако је $a \geq 0$, $a+1 \geq 0$, $a-1 \geq 0$, и $a \neq 1$ тј. $a > 1$. Тада добијамо

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}} \right) : \left(1 + \sqrt{\frac{a+1}{a-1}} \right) = \\
&= \left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+1}}{a-(a+1)} + \frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}{a-(a-1)} \right) : \left(\frac{\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}} \right) = \\
&= \left(\sqrt{a+1} - \sqrt{a} + \sqrt{a} + \sqrt{a-1}\right) : \left(\frac{\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}} \right) = \\
&= \left(\sqrt{a+1} + \sqrt{a-1}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}} \right) = \\
&= \sqrt{a-1}.
\end{aligned}
$$

12. Средити израз

$$\frac{a^3-b^3}{a+b-\frac{ab}{a+b}} - \frac{a^3+b^3}{a-b+\frac{ab}{a-b}}.$$

Решење:

$$
\begin{aligned}
&\frac{a^3-b^3}{\frac{(a+b)^2-ab}{a+b}} - \frac{a^3+b^3}{\frac{(a-b)^2+ab}{a-b}} = \\
&= \frac{(a+b)\left(a^3-b^3\right)}{a^2+ab+b^2} - \frac{(a-b)\left(a^3+b^3\right)}{a^2-ab+b^2} = \\
&= \frac{(a+b)(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)}{a^2+ab+b^2} - \frac{(a-b)(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)}{a^2-ab+b^2} = \\
&= a^2 - b^2 - (a^2 - b^2) = 0, \text{ уз услов } a \neq b,\ a \neq -b.
\end{aligned}
$$

Задаци за вежбу

1. Упростити израз $\left(\frac{1}{2}\right)^{-8} \cdot 16^{-2} + 2^{-3}\left(0,2\right)^{6} \cdot 50 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(81^{-2}\right)^{\frac{1}{4}}$.
Резултат: 3.

2. Упростити израз $1,7 \cdot \frac{\left(4,5 \cdot 1\frac{2}{3} + 3,75\right)\frac{7}{135}}{\frac{5}{9}} - \left(0,5 + \frac{1}{3} - \frac{5}{12}\right)$.
Резултат: $1\frac{17}{84}$.

3. Упростити израз $\left(16^{-2}\right)^{-2} : 16^{(-2)^{-2}} : 16^{-2^{-2}}$.
Резултат: 16^4.

4. Упростити израз $\left(\sqrt{\left(\sqrt{3} - \frac{9}{5}\right)^{2}} - \sqrt[3]{\left(\frac{8}{5}\right)^{3} - \sqrt{3}}\right)^{2}$.
Резултат: $\frac{1}{25}$.

5. Упростити израз $\left(\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \cdot \frac{a^3-b^3}{a^2+b^2}\right) : \left(\frac{a^2+b^2}{ab} + 1\right)$.
Резултат: $\frac{a-b}{ab}$, $ab \neq 0$.

6. Рационалисати именилац разломка $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}$.
Резултат: $= \frac{1}{5}\left(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}\right)$.

7. Израчунати $\frac{2}{3}\sqrt[10]{\frac{2^{-5}\sqrt[5]{3^{40}}}{3^{-2}\sqrt[4]{2^{20}}}}$.
Резултат: 1.

8. Упростити израз $\left(\frac{a-8\sqrt{ab}+4b}{a-2\sqrt[4]{ab}-2\sqrt{b}} + \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}\right)$.
Резултат: 1, $a \geq 0$, $b \geq 0$.

9. Упростити израз $\left(\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\frac{a^3-b^3}{a^2+b^2}\right) : \left(\frac{a^2+b^2}{ab} + 1\right)$.
Резултат: $\frac{a-b}{ab}$, $ab \neq 0$.

10. Упростити израз $\frac{1}{a+\frac{1}{b+c}} : \frac{1}{a+\frac{1}{b}} - \frac{1}{b(abc+a+c)}$.
Резултат: 1, $b \neq 0$, $b+c \neq 0$, $ab \neq -1$, $a(b+c) \neq -1$, $b(abc+a+c) \neq 0$.

3 Реалне функције

Пресликавање (функција) непразног скупа $D_f \subset \mathbb{R}$ у непразни скуп $\overline{D_f} \subset \mathbb{R}$ је подскуп f декартовог производа $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, такав да је

$$(\forall x \in D_f) \left(\exists_1 y \in \overline{D_f}\right) y = f(x),$$

што записујемо $f : D_f \to \overline{D_f}$. ($\exists_1$ читамо: „постоји тачно једно“).

Скуп D_f на коме је дефинисана функција зове се област дефинисаности (или домен) функције f, а скуп $\overline{D_f}$ зове се скуп вредности (или кодомен) функције f.

Две функције f и g су једнаке ако и само ако је $D_f = D_g$ и

$$(\forall x \in D_f)\, f(x) = g(x).$$

За функцију $f : D_f \to \overline{D_f}$ кажемо да је *1-1* пресликавање ако и само ако

$$(\forall x_1, x_2 \in D_f)\, (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))\,.$$

За функцију $f : D_f \to \overline{D_f}$ кажемо да је *на* пресликавање ако и само ако

$$\left(\forall y \in \overline{D_f}\right) (\exists x \in D_f)\, y = f(x).$$

За функцију $f : D_f \to \overline{D_f}$ кажемо да је бијекција или бијективно пресликавање ако и само ако је она *1-1* и *на* пресликавање.

Нека су A, B и C непразни скупови и $f : B \to C$, $g : A \to B$. Тада је композиција функција $f \circ g$ (читамо: “f кружић g”) пресликавање скупа A у скуп C тако да је

$$(\forall x \in A)\, (f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Бијекција $f : D_f \to \overline{D_f}$ има инверзну функцију $f^{-1} : \overline{D_f} \to D_f$ која задовољава

$$(\forall x \in D_f) \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x \text{ и } \left(\forall y \in \overline{D_f}\right) \left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y.$$

Решени задаци

1. Да ли међу функцијама $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{x^2}{x}$, $f_3(x) = \sqrt{x^2}$, $f_4(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2$ има једнаких ?

Решење:
$f_1(x) = x$ и њен домен је $x \in \mathbb{R}$,
$f_2(x) = x$ и њен домен је $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
$f_3(x) = |x|$ и њен домен је $x \in \mathbb{R}$,
$f_4(x) = x$ и њен домен је $x \in [0, \infty)$.
Закључујемо да међу датим функцијама нема једнаких.

2. Да ли међу функцијама $f_1(x) = 2\log_2 x$, $f_2(x) = \log_2 x^2$, $f_3(x) = 2\log_2 |x|$, $f_4(x) = \frac{2}{\log_x 2}$ има једнаких ?

Решење:
$f_1(x) = 2\log_2 x$ и њен домен је $x \in (0, \infty)$,
$f_2(x) = 2\log_2 |x|$ и њен домен је $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
$f_3(x) = 2\log_2 |x|$ и њен домен је $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
$f_4(x) = 2\log_2 x$ и њен домен је $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$.
Закључујемо да међу датим функцијама важи:
$f_1(x) \neq f_2(x) = f_3(x) \neq f_4(x) \neq f_1(x)$.

3. Да ли међу датим функцијама $f_1(x) = e^{\ln x}$, $f_2(x) = \frac{x^2}{x}$, $f_3(x) = \sqrt{x^2}$, $f_4(x) = \ln(e^x)$ има једнаких ?

Решење:
$f_1(x) = x$ и њен домен је $x \in (0, \infty)$,
$f_2(x) = x$ и њен домен је $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
$f_3(x) = |x|$ и њен домен је $x \in \mathbb{R}$,
$f_4(x) = x$ и њен домен је $x \in \mathbb{R}$.
Закључујемо да међу датим функцијама нема једнаких.

4. Ако је $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = (x-1)^2$, одредити $f(3)$.

Решење: Задатак се може решити на два начина.

Један начин би био да одредимо вредност за x, тако да је $\frac{x}{x+1} = 3$. Одатле следи да је $x = -\frac{3}{2}$, па је $f\,(3) = (-\frac{3}{2} - 1)^2 = 6.25$. Приметимо да нам овим начином добијамо само вредност функције у sадатој тачки.

Други начин би био да уведемо смену $\frac{x}{x+1} = t$.

Из претходне једнакости следи да је $x = \frac{t}{1-t}$, враћањем у поставку добијамо $f\,(t) = (\frac{t}{1-t} - 1)^2 = \left(\frac{2t-1}{1-t}\right)^2$. На крају $f\,(3) = (\frac{2 \cdot 3 - 1}{1-3})^2 = 6.25$.

5. Ако је $f\left(\frac{x+1}{2x-1}\right) = x^{2008} - 2x^{2007} + 1$, тада је $f\left(f(2)\right)$ једнако:

Решење: Довољно је наћи вредност x, тако да важи једнакост $\frac{x+1}{2x-1} = 2$. Из дате једнакости добијамо да је $x = 1$, па је $f\left(2\right) = 1^{2008} - 2 \cdot 1^{2007} + 1 = 0$. Сада треба наћи вредност за x, тако да важи једнакост $\frac{x+1}{2x-1} = 0$. Из претходне једнакости добијамо да је $x = -1$, па је $f\left(0\right) = (-1)^{2008} - 2 \cdot (-1)^{2007} + 1 = 4$, тако да је $f\left(f(2)\right) = f\left(0\right) = 4$.

6. Ако је $f\left(2x - 1\right) = x$, тада је $f(f(x))$ једнако:

Решење: Увођењем смене $2x - 1 = t$ из које следи да је $x = \frac{t+1}{2}$, и враћањем у поставку добијамо $f\left(t\right) = \frac{t+1}{2}$.

На крају $f(f(x)) = f(\frac{x+1}{2}) = \frac{\frac{x+1}{2}+1}{2} = \frac{x+3}{4}$.

7. Које су од функција $f(x) = \frac{5x+3}{2x-5}$, $g(x) = \frac{1-x}{1+x}$, $h(x) = \frac{3-x}{2+x}$ саме себи инверзне ?

Решење: За одређивање инверзне функције од $f(x)$ решавамо једначину $y = \frac{5x+3}{2x-5}$ по x тако што ћемо помножити леву и десну страну са $2x - 5$ чиме добијамо $2xy - 5y = 5x + 3$ одакле следи да је $x = \frac{3+5y}{2y-5}$, па је $f^{-1}(x) = f(x)$.

За одређивање инверзне функције од $g(x)$ решавамо једначину $y = \frac{1-x}{1+x}$ по x тако што ћемо помножити леву и десну страну једнакости са $1 + x$ чиме добијамо $y + xy = 1 - x$ одакле следи да је $x = \frac{1-y}{1+y}$, па је $g^{-1}(x) = g(x)$.

За одређивање инверзне функције од $h(x)$ решавамо једначину $y = \frac{3-x}{2+x}$ по x тако што ћемо помножити леву и десну страну једнакости са $2 + x$ чиме добијамо $2y + xy = 3 - x$ одакле следи да је $x = \frac{3-2y}{1+y}$, па је $h^{-1}(x) \neq h(x)$;

8. Ако је $f(x) + 2f\left(1 - x\right) = x$ за свако $x \in \mathbb{R}$, тада је $f(x)$ једнако:

Решење: Уведимо смену $1 - x = t$, одакле следи да је $x = 1 - t$, чијим враћањем у поставку добијамо $f(1 - t) + 2f\left(t\right) = 1 - t$ одакле следи да је $f(1 - t) = 1 - t - 2f(t)$. На крају $f(x) + 2\left(1 - x - 2f(x)\right) = x$ па је $f(x) = \frac{2-3x}{3}$.

9. Одредити нуле функције $f(x) = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{x-2-|x-2|}$.

Решење: Домен функције добијамо решавањем $x - 2 - |x-2| \neq 0$: за $x \geq 2$ имамо $0 \neq 0$, а за $x < 2$ имамо $2(x-2) \neq 0$ одакле следи да је $x \neq 2$. Тако да је $D_f = (-\infty, 2)$. Нуле бројиоца образују скуп $\{0,1,2,3,4\}$, па су нуле функције само оне које припадају домену, тј. $x \in \{0,1\}$.

10. Дата је функција $f(x) = 2x - x^2$. Израчунати $f(f(f(1-x)))$.

Решење:

$$\begin{aligned}
&f(f(f(1-x))) = \\
&\quad = f(f(2(1-x) - (1-x)^2)) = \\
&\quad = f(f(1-x^2)) = \\
&\quad = f(2(1-x^2) - (1-x^2)^2) = \\
&\quad = 2(1-x^4) - (1-x^4)^2 = \\
&\quad = 1 - x^8.
\end{aligned}$$

11. Ако је $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ и $g(x) = \sin x$, израчунати

$$6g\left(f\left(f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right) + f\left(g\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Решење:

$$\begin{aligned}
&6g\left(f\left(f\left(-\tfrac{\pi}{4}\right)\right)\right) + f\left(g\left(-\tfrac{\pi}{4}\right)\right) = \\
&\quad = 6g\left(f\left(\sqrt{1-\left(-\tfrac{\pi}{4}\right)^2}\right)\right) + f\left(\sin\left(-\tfrac{\pi}{4}\right)\right) = \\
&\quad = 6g\left(f\left(\sqrt{1-\tfrac{\pi^2}{16}}\right)\right) + f\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \\
&\quad = 6g\left(\sqrt{1-\left(1-\tfrac{\pi^2}{16}\right)}\right) + \sqrt{1-\tfrac{2}{4}} = \\
&\quad = 6\sin\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\sqrt{2}}{2} = \tfrac{7\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

12. Функције f и g задате су са $g\left(f\left(x\right)\right) = \frac{x}{2}$ и $\mathrm{g}(x) = \log_{16} x$. Колико је $f\left(-\frac{3}{2}\right) + f\left(-1\right)$?

Решење: Очигледно $g^{-1}\left(x\right) = 16^x$, па је $f\left(x\right) = g^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) = 16^{\frac{x}{2}} = 4^x$.

Одатле је $f\left(-\frac{3}{2}\right) + f\left(-1\right) = 4^{-\frac{3}{2}} + 4^{-1} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$.

Задаци за вежбу

1. Да ли међу функцијама $f_1(x) = \sin x,\ f_2(x) = \cos x \cdot \operatorname{tg} x,\ f_3(x) = \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}},\ f_4(x) = |\sin x|$ има једнаких?
   Резултат: $f_1(x) \neq f_2(x) \neq f_3(x) = f_4(x) \neq f_1(x)$.

2. Да ли међу функцијама $f_1(x) = \sin^2 x + \cos^2 x,\ f_2(x) = \frac{x}{x},\ f_3(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x},\ f_4(x) = \log_x x$ има једнаких?
   Резултат: нема.

3. Ако је $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{x+2}{x+1}$, израчунати $f(3)$.
   Резултат: 0.

4. Ако је $f\left(3x+2\right) = 2x-1$, израчунати $f(f(x))$.
   Резултат: $\frac{x-8}{9}$.

5. Ако је $f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x+1$ за свако $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, израчунати $f(x)$.
   Резултат: $\frac{3+2x-x^2}{8x}$.

6. Одредити нуле функције $f(x) = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x+4)}{\log(2-x)}$.
   Резултат: Нуле функције образују скуп $\{-4,\ 0\}$.

7. Функције f и g задате су са $g\left(f\left(x\right)\right) = 2x$ и $\mathrm{g}(x) = 3x+1$. Колико је $f\left(-1\right) + f\left(-2\right)$?
   Резултат: -6.

8. Ако је $f(x) = \frac{1-2x}{2+x}$ и $g(x) = \frac{x+1}{3-x}$, израчунати $g\left(f\left(x\right)\right) + f\left(g\left(-x\right)\right)$.
   Резултат: $\frac{2(7x^2+8x+13)}{5(x+1)(x+7)}$.

9. Одредити кодомен и инверзну функцију функције $f(x) = \frac{2x-1}{4-x}$, ако $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.
   Резултат: $f : (-\infty, 4) \cup (4, \infty) \xrightarrow[na]{1-1} (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$;
   $f^{-1}(x) = \frac{4x+1}{x+2}$.

10. Одредити инверзну функцију функције $f(x) = x^2 - 2x$, ако
    $f : (-\infty, 1] \xrightarrow[na]{1-1} [-1, \infty)$.
    Резултат: $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x+1}$.

4 Полиноми

Функција облика $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, $x \in \mathbb{C}$ је полином $n-$тог степена, где су $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$ коефицијенти полинома.

Ако је $a_0 = a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$ полином се зове нула полином, а ако је $a_0 \neq 0 \wedge n = 0$ полином је константа и каже се да је степена нула. Ако је $a_n = 1$ полином је нормиран.

Два полинома су идентички једнака ако и само ако су истог степена и ако су им сви коефицијенти уз исти степен једнаки.

За сваки полином степена $n \geq 1$,

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

постоји бар један, реалан или комплексан, број c за који је $P_n(c) = 0$, односно, сваки полином има бар једну нулу.

Полином може имати највише онолико различитих нула колико износи његов степен. Ако су $x_1, x_2, ..., x_p \in \mathbb{C}$, $(p \leq n)$ све различите нуле полинома, онда се он може представити као

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}......(x - x_p)^{k_p}$$

за свако $x \in \mathbb{C}$, при чему су $k_1, k_2, ...k_p$ природни бројеви за које важи да је $k_1 + k_2 + ... + k_p = n$. При томе се каже да је k_1 вишеструкост нуле x_1, k_2 вишеструкост нуле x_2, итд., k_p вишеструкост нуле x_p.

За свака два полинома $P_n(x)$ и $Q_m(x) \neq 0$, $m < n$ једнозначно су одређени полиноми $S_{n-m}(x)$ (количник) и $R_k(x)$, $0 \leq k < m$ (остатак), тако да је $P_n(x) = Q_m(x) \cdot S_{n-m}(x) + R_k(x)$ (Теорема о разлагању полинома).

Безуов став: Остатак при дељењу полинома $P_n(x)$ са $x - a$ је P_n(a).

За полиноме са реалним коефицијентима важи: ако је $c \epsilon \mathbb{C}$ комплексна нула реалног полинома $P_n(x)$ реда k, тада је $\bar{c}$ такође нула реалног полинома $P_n(x)$ истог реда.

За полином $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$ важе Виетове формуле

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1 \cdot x_2 + \ldots + x_{n-1} \cdot x_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ \vdots & \\ x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n &= (-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

Специјално за $n = 3$, имамо $P_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, $a_3 \neq 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{a_2}{a_3} \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 &= \frac{a_1}{a_3} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 &= -\frac{a_0}{a_3} \end{cases}$$

Специјално за $n = 4$, имамо $P_4(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, $a_4 \neq 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= -\frac{a_3}{a_4} \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 + x_3 \cdot x_4 &= \frac{a_2}{a_4} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 &= -\frac{a_1}{a_4} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 &= \frac{a_0}{a_4} \end{cases}$$

Решени задаци

1. Наћи количник и остатак при дељењу полинома:
   а) $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ са $x^2 - 3x + 1$;
   б) $x^3 - 3x^2 - x - 1$ са $3x^2 - 2x + 1$.

Решење:

а)

$$\begin{array}{l} (2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6) : (x^2 - 3x + 1) = 2x^2 + 3x + 11 + \frac{25x-5}{x^2-3x+1} \\ \underline{-(2x^4 - 6x^3 + 2x^2)} \\ \quad 3x^3 + 2x^2 - 5x + 6 \\ \quad \underline{-(3x^3 - 9x^2 + 3x)} \\ \qquad 11x^2 - 8x + 6 \\ \qquad \underline{-(11x^2 - 33x + 11)} \\ \qquad\quad 25x - 5 \end{array}$$

При дељењу полинома $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ са $x^2 - 3x + 1$ добијамо количник $2x^2 + 3x + 11$ и остатак $25x - 5$.

б)

$$\begin{array}{l} (x^3 - 3x^2 - x - 1) : (3x^2 - 2x + 1) = \frac{1}{3}x - \frac{7}{9} + \frac{-\frac{26}{9}x - \frac{2}{9}}{3x^2-2x+1} \\ \underline{-(x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x)} \\ \quad (-\frac{7}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 1) \\ \quad \underline{-(-\frac{7}{3}x^2 + \frac{14}{9}x - \frac{7}{9})} \\ \qquad -\frac{26}{9}x - \frac{2}{9} \end{array}$$

При дељењу полинома $x^3 - 3x^2 - x - 1$ са $3x^2 - 2x + 1$ добијамо количник $\frac{1}{3}x - \frac{7}{9}$ и остатак $-\frac{26}{9}x - \frac{2}{9}$.

2. Колики је остатак дељења полинома $4x^5+9x^3+19x+92$ са биномом $x+1$?

Решење: По Безуовом ставу, остатак при дељењу полинома са $x+1$ је $P(-1) = 4(-1)^5 + 9(-1)^3 + 19(-1) + 92 = 60$.

3. Одредити реалан број a, тако да полином $P(x) = x^4 + ax^2 + x - 6$ буде дељив са $x+2$.

Решење: Како је полином $P(x)$ дењив са $x+2$, онда је једна његова нула $x_1 = -2$, па је $P(-2) = 0$, односно $16 + 4a - 2 - 6 = 0$ одакле следи да је $a = -2$.

4. При дељењу полинома$P_n(x)$ са $x-1$ даје остатак 3, а при дељењу са $x+3$ даје остатак -1, колики је остатак при дељењу са x^2+2x-3?

Решење: Из услова задатка, коришћењем Безуовог става, добијамо $P_n(1) = 3$ и $P_n(-3) = -1$. Представимо полином као
$P_n(x) = (x^2 + 2x - 3) \cdot K_{n-2}(x) + ax + b$, тада
$P_n(1) = 0 \cdot K_{n-2}(1) + a + b = 3$ и
$P_n(-3) = 0 \cdot K_{n-2}(-3) - 3a + b = -1$, па добијамо систем од две једначине са две непознате $a + b = 3$ и $3a + b = 1$. Решавањем система добијамо $a = 1$ и $b = 2$, па је датле је тражени остатак $R(x) = x + 2$.

5. При дељењу полинома $P_n(x)$ са x даје остатак 2, а при дељењу са x^2+1 даје остатак $2x$, колики је остатак при дељењу са x^3+x ?

Решење: Из услова задатка, коришћењем Безуовог става, добијамо $P_n(0) = 2$ и по разлагању $P_n(x) = (x^2+1) \cdot R_{n-2}(x) - 2x$. Представимо полином као $P_n(x) = (x^3 + x) \cdot K_{n-3}(x) + ax^2 + bx + c$, остатак је облика $ax^2 + bx + c$, јер остатак мора бити највише другог степена, тада $P_n(0) = c = 2$ и $P_n(i) = a{\cdot}i^2 + b \cdot i + c = 2 \cdot i$ одакле следи да је $a = 2$, $b = 2$. Добијене вредности заменимо и добијемо остатак $R(x) = 2 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 2$

6. Одредити параметре a и b тако да полином $Q(x) = x^2+2x-3$ дели полином $P(x) = x^4 - ax^3 + bx^2 + 9$.

Решење: први начин:

Како је $Q(x) = x^2 + 2x - 3 {=} (x+3) \cdot (x-1)$ из чињенице да су нуле делиоца истовремено и нуле дељеника добијамо да важи

$P(-3) = 0 \Rightarrow 81 + 27a + 9b + 9 = 0 \Rightarrow 3a + b = -10$

$P(1) = 0 \Rightarrow 1 - a + b + 9 = 0 \Rightarrow -a + b = -10$

а одатле систем од две једначине са две непознате

$$\left\{ \begin{array}{rcl} P(-3) & = & 0 \\ P(1) & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3a + b & = & -10 \\ -a + b & = & -10 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} a & = & 0 \\ b & = & -10 \end{array} \right.$$

чија су решења $a = 0$, $b = -10$. Одатле следи да је тражени полином $P(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.

други начин:

Полином $P(x)$ можемо записати на следећи начин:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 - ax^3 + bx^2 + 9 = (x^2 + 2x - 3) \cdot (x^2 + Ax - 3) = \\ &= x^4 + Ax^3 + 2x^3 - 6x^2 + 2Ax^2 - 6x - 3Ax - 9. \end{aligned}$$

Изједначавањем коефицијената уз исти степен добијамо

- из једнакости коефицијената уз x^3 добијамо $A + 2 = a$,

- из једнакости коефицијената уз x^2 добијамо$-6 + 2A = b$,

- из једнакости коефицијената уз x добијамо $-6 - 3A = 0$.

Решавањем овог система од три једначине са три непознате добијамо да је $A = -2, a = 0, b = -10$.

Одавде следи да је $P(x) = (x^2 + 2x - 3) \cdot (x^2 - 2x - 3) = x^4 - 10x^2 + 9$.

7. Ако су x_1, x_2, x_3 решења једначине $125x^3 - 64 = 0$, тада је $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 - (x_1 + x_2 + x_3)$ једнако:

Решење: Користећи Вијетове формуле добијамо $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3} = 0$ и $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{a_0}{a_3} = \frac{64}{125}$, па је $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 - (x_1 + x_2 + x_3) = \frac{64}{125}$.

8. Једначина $x^3 + ax + b = 0$ (a и b реални бројеви) има решења $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$. Производ свих решења те једначине је:

Решење: Користећи Вијетове формуле добијамо $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3}$ одакле следи $1 + 2 + x_3 = 0$ тј. $x_3 = -3$, па је $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -6$.

9. Збир квадрата свих нула полинома $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ једнак је:

Решење: Користећи Вијетове формуле добијамо $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3} = -3$, квадрирањем добијамо $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1 \cdot x_2 + 2x_1 \cdot x_3 + 2x_2 \cdot x_3 = 9$. Како је $x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{a_1}{a_3} = -4$, заменом у предходно добијамо $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 17$.

10. Ако је један корен (нула) полинома $x^3 - 2x + b$, $b \in \mathbb{R}$, комплексан број $1 + i$, $i^2 = -1$. Колики је реалан корен тог полинома ?

Решење: Како се ради о полиному са реалним коефицијентима, имамо да он има коњуговано комплексне нуле па је његова друга нула комплексни број $1-i$. Користећи Вијетове формуле добијамо $x_1+x_2+x_3 = -\frac{a_2}{a_3}$ одакле следи да је $1 + i + 1 - i + x_3 = 0$ што на крају даје $x_3 = -2$.

11. Одредити параметре a и b тако да при дељењу полинома $x^4 + 2x^2 + ax + b$ са $x^2 - 1$ даје остатак $x + 6$.

Решење: По теореми о разлагању полинома имамо

$$x^4 + 2x^2 + ax + b = (x^2 - 1) \cdot S_2(x) + x + 6.$$

Заменом за $x = 1$ добијамо $3 + a + b = 7$, а за $x = -1$ добијамо $-1 - a + b = 5$. Решење добијеног система од две једначине са две непознате је $a = -1$ и $b = 5$.

12. Колики је остатак при дељењу полинома $x^{2008}+x^{2007}+1$ са полиномом $x^2 + 1$?

Решење: По теореми о разлагању полинома важи да је

$$x^{2008} + x^{2007} + 1 = (x^2 + 1) \cdot S_{2006}(x) + ax + b,$$

за $x = i$ добијамо $i^{2008}+i^{2007}+1 = (i^2+1)\cdot S_{2006}(i)+a\cdot i+b$, сређивањем добијамо $2 - i = a \cdot i + b$ одакле следи да је $a = -1$, $b = 2$, па је остатак $R(x) = -x + 2$.

Задаци за вежбу

1. Колики је остатак дељења полинома $3x^4 + 5x^3 - 12x + 15$ биномом $x - 2$?
   Резултат: 49.

2. Одредити реалан број a, тако да полином $P(x) = x^4+ax^3-2x^2-x+3$ при дељењу биномом $x - 1$ даје остатак 5.
   Резултат: $a = 4$.

3. При дељењу полинома $P_n(x)$ биномим $x + 1$ даје остатак 5, а при дељењу биномим $x-2$ даје остатак 2. Колики је остатак при дељењу полинома $P_n(x)$ квадратним триномом $x^2 - x - 2$?
   Резултат: $R(x) = -x + 4$.

4. При дељењу полинома $P_n(x)$ полиномом $x^6 + 1$ добија се остатак $x^3 + 2$. Колики је остатак при дељењу полнома $P_n(x)$ квадратним биномом $x^2 + 1$?
   Резултат: $R(x) = -x + 2$.

5. Одредити параметре a, b тако да полином$Q(x) = x^2 + x - 2$ дели полином $P(x) = x^4 - 5x^2 + ax + b$.
   Резултат: $a = 0$; $b = 4$.

6. Нека су x_1, x_2, x_3 решења једначине $2x^3 - x^2 - 4 = 0$. Израчунати $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.
   Резултат: $\frac{1}{4}$.

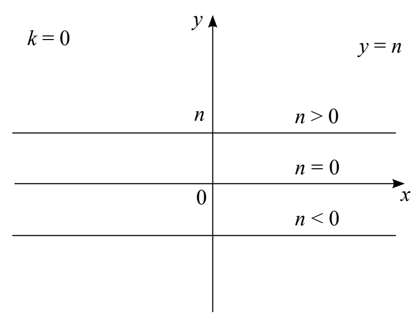
7. Нека је један корен (нула) полинома $x^3 - 4x^2 + ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, комплексан број $1 - 2i$, $i^2 = -1$. Колики је реалан корен тог полинома?
   Резултат: $x_3 = 2,\ a = 9,\ b = -10$.

8. Одредити полином трећег степена чије су нуле
   $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, а слободан члан му је -24.
   Резултат: $P_3(x) = 2x^3 - 14x^2 + 32x - 24$.

9. Колики је остатак при дељењу полинома $x^{2015}+3x^{2014}+x+3$ полиномом $x^2 + 3x$?
   Резултат: $R(x) = x + 3$.

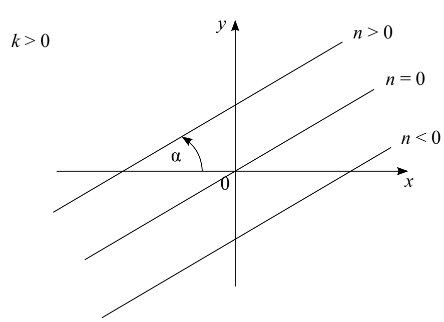
5 Линеарне једначине и неједначине.

Функцију облика $y = n$, $(n \in \mathbb{R})$ називамо константном функцијом. График функције је приказан на слици 4.

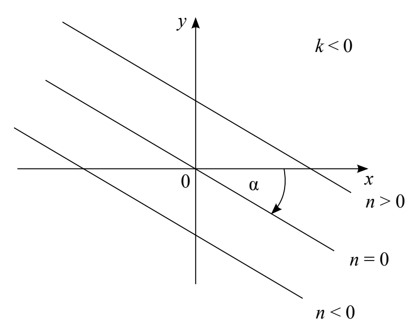


Сл. 4: График функције $y = n$

Функцију облика $y = kx + n$, $(k, n \in \mathbb{R})$, $(k \neq 0)$ називамо линеарном функцијом а број k се назива коефицијентом правца и представља тангенс угла који права заклапа са позитивним делом $x-$осе, тј. $k = \operatorname{tg}\alpha$. Број n се назива слободним коефицијентом и представља одсечак који права одсеца на $y-$оси. Нула линеарне функције је $x = -\frac{n}{k}$.



Сл. 5: График функције
$y = kx + n$, $k > 0$



Сл. 6: График функције
$y = kx + n$, $k < 0$

Једначина облика $ax = b$ је линеарна једначина са непознатом x.

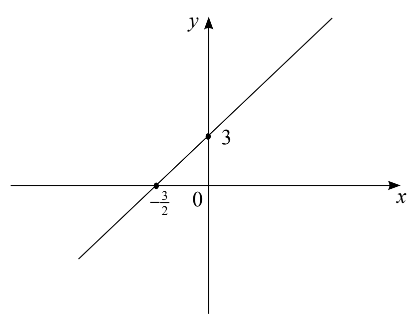
Ако је $a \neq 0$, тада једначина има јединствено решење $x = \frac{b}{a}$, Ако је $a = 0$ и $b \neq 0$ тада једначина нема решење,

Ако је $a = 0$ и $b = 0$ тада једначина има бесконачно много решења и скуп свих решења једначине је скуп реалних бројева.

Решени задаци

1. Дата је функција $y = mx - 1 + 2m$. Одредити параметар m тако да њен график сече y-осу у тачки $A(0, 3)$. За добијено m скицирати график функције.

Решење: Из услова да график линеарне функције садржи тачку добијамо да је $3 = m \cdot 0 - 1 + 2m$ одакле следи да је $4 = 2m$ тј. $m = 2$.



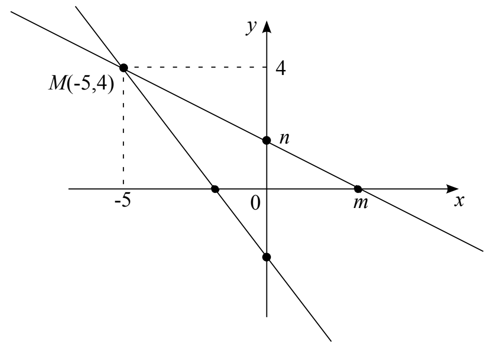
Сл. 7: График функције $y = 2x + 3$

2. Написати једначину праве p чији график садржи тачку $T(6, -5)$ и паралелан је правој $q : 2x + 3y + 5 = 0$.

Решење: Експлицитни облик праве q је $y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$. Две праве су паралелне ако имају једнаке коефицијенте правца тј. ако је $k = -\frac{2}{3}$. Једначина праве p је $y + 5 = -\frac{2}{3}(x - 6)$ или у експлицитном облику $y = -\frac{2}{3}x - 1$.

3. Права пролази кроз тачку $M(-5, 4)$ и са координатним осама образује троугао површине $P = 5$. Одредити једначину праве.

Решење: Једначина праве која садржи тачку $M(-5, 4)$ је $y - 4 = k(x + 5)$ одакле добијамо једначину праве у експлицитном облику $y = kx + 5k + 4$.



Сл. 8: Праве које пролазе кроз $M(-5,4)$ и са координатним осама образују троугао површине 5

Одсечци на координатним осама нека су једнаки m и n. Тада је једначина праве у сегментном облику $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$, па је површина троугла $P=\frac{1}{2}|mn|$. Из чињенице да права пролази кроз тачку M тражени троугао је у првом или трећем квадранту и добијамо једначину $\frac{-5}{m}+\frac{4}{n}=1$. А из чињенице да површина троугла једнака 5 и да припадају првом или трећем квадранту добијамо једначину $\frac{mn}{2}=5$. Из ове две једначине добијамо два решења: $m=1$, $n=2$ или $m=-\frac{5}{2}, n=-4$. То значи да две праве задовољавају задате услове: $2x+5y-10=0$ и $8x+5y+20=0$.

4. У једначини $3x+my-12=0$ одредити параметар m тако да одсечак праве између координатних оса износи 5.

Решење: Напишимо једначину праве у сегментном облику $\frac{3x}{12}+\frac{my}{12}=1$. Тиме добијамо да су одсечци једнаки 4, тј. $\frac{12}{m}$. Како одсечци представљају катете правоуглог троугла, то је дужина хипотенузе, тј. дужина одсечка је једнака $\sqrt{4^2+\left(\frac{12}{m}\right)^2}=5$. Квадрирањем претходне једначине добијамо $16+\frac{144}{m^2}=25$ што је еквивалентно једначини $\frac{144}{9}=m^2$. Решавањем претходне једначине добијамо $m^2=16$, односно $m=\pm 4$.

5. Решити једначину $\frac{x-1}{2}+\frac{3x-1}{4}=\frac{2x-4}{3}+\frac{x+1}{6}$.

Решење: Дату једначину помножимо са $NZS(2,3,4,6)$, тј. са 12, и добијамо једначину $6(x-1)+3(3x-1)=4(2x-4)+2(x+1)$ која је еквивалентна $15x-9=10x-14$ тј. $5x=-5$. Одавде добијамо да је решење једначине $x=-1$.

6. Решити једначину $\frac{1}{x^2+2x+1}+\frac{2}{x+2x^2+x^3}=\frac{5}{2x+2x^2}$.

Решење: Задата једначина је еквивалентна једначини $\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{2}{x(x+1)^2}=\frac{5}{2(x+1)}$, $x\neq -1$, $x\neq 0$. Ако помножимо обе стране са $2x(x+1)^2$ добијамо једначину $2x+4=5(1+x)$ што је еквивалентно $x=-\frac{1}{3}$.

7. Решити једначину $x-\frac{1+\frac{3}{4}x}{4}+\frac{5-\frac{2}{3}x}{4}=\frac{3-\frac{x}{2}}{3}$.

Решење: Ако помножимо једначину са $NZS(3,4)=12$ добијамо $12x-3\left(1+\frac{3}{4}x\right)+3\left(5-\frac{2}{3}x\right)=4\left(3-\frac{x}{2}\right)$. Након ослобађања заграда добијамо $12x-3+\frac{9}{4}x+15-\frac{10}{3}x-12+2x=0$ што је еквивалентно $12x-\frac{9}{4}x=0$, тј. $\frac{39}{4}x=0$. Одавде добијамо да је решење једначине $x=0$.

8. Решити једначину $\frac{x-2}{x+2}+\frac{x+2}{x-2}=2$.

Решење: Свођењем на заједничке имениоце добијамо еквивалентну једначину $\frac{(x-2)^2+(x+2)^2}{(x-2)(x+2)}=2$. Сређивањем имениоца добијамо једначину $\frac{2x^2+8}{x^2-4}=2$ тј. $\frac{2x^2+8}{x^2-4}-2\frac{x^2-4}{x^2-4}=0$. Након сређивања добијамо једначину $\frac{16}{x^2-4}=0$ одакле закључујемо да полазна једначина нема решења.

9. Решити једначину $|x+2|-|2x-1|=1$.

Решење: Скуп реалних бројева можемо поделити на скупове на којима аргументи апсолутних вредности имају константан знак $|x+2|=\begin{cases}x+2, & x\geq -2\\ -(x+2), & x<-2\end{cases}$, $|2x-1|=\begin{cases}2x-1, & x\geq \frac{1}{2}\\ -(2x-1), & x<\frac{1}{2}\end{cases}$, тј. на интервале $(-\infty,-2)$, $[-2,\frac{1}{2})$ и $[\frac{1}{2},+\infty)$.

Ако x припада првом интервалу полазна једначина је еквивалентна једначини $-(x+2)-(-(2x-1))=1$ чијим решавањем добијамо да је $x=4$. Како смо претпоставили да решење припада првом интервалу, ово решење морамо да одбацимо.

Ако x припада другом интервалу полазна једначина је еквивалентна једначини $x+2+2x-1=1$ чијим решавањем добијамо да је $x=0$. Решење прихватамо зато што припада другом интервалу.

Ако x припада трећем интервалу полазна једначина је еквивалентна једначини $x+2-2x+1=1$ чијим решавањем добијамо да је $x=2$. Решење прихватамо зато што припада трећем интервалу.

Скуп решења једначине је $\{0,2\}$.

10. Решити једначину $|3x-1|-|2-x|=1$.

Решење: Скуп реалних бројева можемо поделити на скупове на којима аргументи апсолутних вредности имају константан знак $|3x-1| = \begin{cases} 3x-1, & x \geq \frac{1}{3} \\ -(3x-1), & x < \frac{1}{3} \end{cases}$, $|2-x| = \begin{cases} 2-x, & x \leq 2 \\ -(2-x), & x > 2 \end{cases}$, тј. на интервале $(-\infty, \frac{1}{3})$, $[\frac{1}{3}, 2]$ и $(2, +\infty)$.

Ако x припада првом интервалу полазна једначина је еквивалентна једначини $-(3x-1)-(2-x)=1$ чијим решавањем добијамо да је $x=-1$. Како смо претпоставили да решење припада првом интервалу, ово решење прихватамо.

Ако x припада другом интервалу полазна једначина је еквивалентна једначини $3x-1-2+x=1$ чијим решавањем добијамо да је $x=1$. Решење прихватамо зато што припада другом интервалу.

Ако x припада трећем интервалу полазна једначина је еквивалентна једначини $3x-1+2-x=1$ чијим решавањем добијамо да је $x=0$. Решење одбацујемо зато што не припада трећем интервалу.

Скуп решења једначине је $\{-1, 1\}$.

11. Решити једначину $2|x+1|-|x-2|-3=0$.

Решење: Скуп реалних бројева можемо поделити на скупове на којима аргументи апсолутних вредности имају константан знак $|x+1| = \begin{cases} x+1, & x \geq -1 \\ -(x+1), & x < -1 \end{cases}$, $|x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ -(x-2), & x < 2 \end{cases}$, тј. на интервале $(-\infty, -1)$, $[-1, 2]$ и $(2, +\infty)$.

Ако x припада првом интервалу полазна једначина је еквивалентна једначини $2(-(x+1))-(-(x-2))-3=0$ чијим решавањем добијамо да је $x=-7$. Како смо претпоставили да решење припада првом интервалу, ово решење прихватамо.

Ако x припада другом интервалу полазна једначина је еквивалентна једначини $2(x+1)-(-(x-2))-3=0$ чијим решавањем добијамо да је $x=1$. Решење прихватамо зато што припада другом интервалу.

Ако x припада трећем интервалу полазна једначина је еквивалентна једначини $2(x+1)-(x-2)-3=0$ чијим решавањем добијамо да је $x=-1$. Решење одбацујемо зато што не припада трећем интервалу.
Скуп решења једначине је $\{-7, 1\}$.

12. Решити неједначину $\frac{2x-3}{2} - \frac{1+3x}{6} + \frac{7-4x}{3} > 0$.

Решење: Дату неједначину помножимо са $NZS(2,6,3) = 6$ одакле добијамо неједначину $3(2x-3)-(1+3x)+2(7-4x) > 0$ која је еквивалентна неједначини $6x-9-1-3x+14-8x > 0$. Сређивањем добијене неједначине добијамо $-5x+4 > 0$ тј. $x < \frac{4}{5}$.

13. Решити неједначину $2|x-2| - |x+3| + 2 > 0$.

Решење: Задатак можемо решити тако што ћемо скуп реалних бројева можемо поделити на скупове на којима аргументи апсолутних вредности имају константан знак. Како је
$|x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ -(x-2), & x < 2 \end{cases}$, $|x-2| = \begin{cases} x+3, & x \geq -3 \\ -(x+3), & x < -3 \end{cases}$, интервали су $(-\infty,-3)$, $[-3,2]$ и $(2,+\infty)$.

1. Ако је x припада првом интервалу, тада из полазне неједначине добијамо неједначину $-2(x-2)+(x+3)+2 > 0$, која је еквивалентна $-x+9 > 0$ тј. $x < 9$. Добијени скуп решења пресецимо првим интервалом, па ћемо добити $(-\infty,-3) \cap (-\infty,9) = (-\infty,-3)$,

2. Ако је x припада другом интервалу, тада из полазне неједначине добијамо неједначину $-2(x-2)-(x+3)+2 > 0$ која је еквивалентна $x < 1$. Добијени скуп решења пресецимо првим интервалом, па ћемо добити $[-3,2] \cap (-\infty,1) = [-3,1)$,

3. Ако је x припада трећем интервалу, тада из полазне неједначине добијамо неједначину $2(x-2)-(x+3)+2 > 0$ која је еквивалентна $x-5 > 0$ тј. $x > 5$. Скуп решења је $(2,+\infty) \cap (5,+\infty) = (5,+\infty)$.

Скуп решења полазне неједначине је унија добијених интервала тј. $(-\infty,-3) \cup [-3,1) \cup (5,+\infty) = (-\infty,1) \cup (5,+\infty)$.

Задаци за вежбу

1. Одредити једначину праве која пролази кроз пресечну тачку правих $x+7y-12=0$ и $2x-y+6=0$, и кроз тачку $A(8,-4)$.
Резултат: $2x+5y-4=0$.

2. На правој $x - 3y = 0$ одредити тачку из које се дуж AB, где су тачке $A(-1, 7)$, $B(6, 8)$, види под углом од $\frac{\pi}{4}$.
   Резултат: $C(3, -1)$.

3. У једначини $kx + (k+1)y - p = 0$ одредити параметре k и p тако да права пролази кроз тачку $M(2, 1)$, а са координатним осама заклапа троугао површине 4.
   Резултат: $x + 2y - 4 = 0$.

4. Решити једначину $\frac{5x-2}{3} - \frac{13x+1}{7} = \frac{x-5}{2} + x$.
   Резултат: $x = 1$.

5. Решити једначину $\frac{x+3}{4} - \frac{2x-1}{2} = \frac{7x-1}{3} + 1\frac{7}{12}$.
   Резултат: $x = 4$.

6. Решити једначину $\frac{1}{x^3-27} + \frac{2}{x-3} = \frac{2x+1}{x^2+3x+9}$.
   Резултат: $x = -2$.

7. Решити једначину $1 - \frac{x}{1+\frac{x}{1-x}} = x^2$.
   Резултат: $x \in \emptyset$, тј. нема решења.

8. Решити једначину $|2x - 4| + |x + 2| = 3$.
   Резултат: $x \in \emptyset$, тј. нема решења.

9. Решити једначину $|2x - 1| - x + 2 = |x - 3|$.
   Резултат: $x \in \{0, 1\}$.

10. Решити неједначину $|2x + 5| < 1$.
    Резултат: $x \in (-3, -2)$.

11. Решити неједначину $|3x - 2| > 4$.
    Резултат: $x \in (-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (2, \infty)$.

12. Решити неједначину: $2|x + 1| < |x - 2| + 3x + 1$.
    Резултат: $x \in (-\frac{5}{4}, \infty)$

6 Квадратне једначине и неједначине

Општи облик квадратне функције је $f(x) = ax^2 + bx + c$ где су $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $a \neq 0$. График сваке квадратне функције је парабола. Квадратну функцију можемо записати у канонском облику $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$.
Теме параболе је тачка $T(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a})$.
Једначина $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ се зове квадратном једначином чија су решења дата формулом $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.
Израз $D = b^2 - 4ac$ се зове дискриминанта квадратне једначине и она одређује природу решења квдратне једначине:

1. Ако је $D > 0$ тада су решења реална и различита,

2. Ако је $D = 0$ тада су решења реална и једнака,

3. Ако је $D < 0$ тада су решења конјуговано комплексни бројеви.

Ако су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $ax^2 + bx + c = 0$, тада важи идентитет $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
За решења квадратне једначине важе Вијетове формуле $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

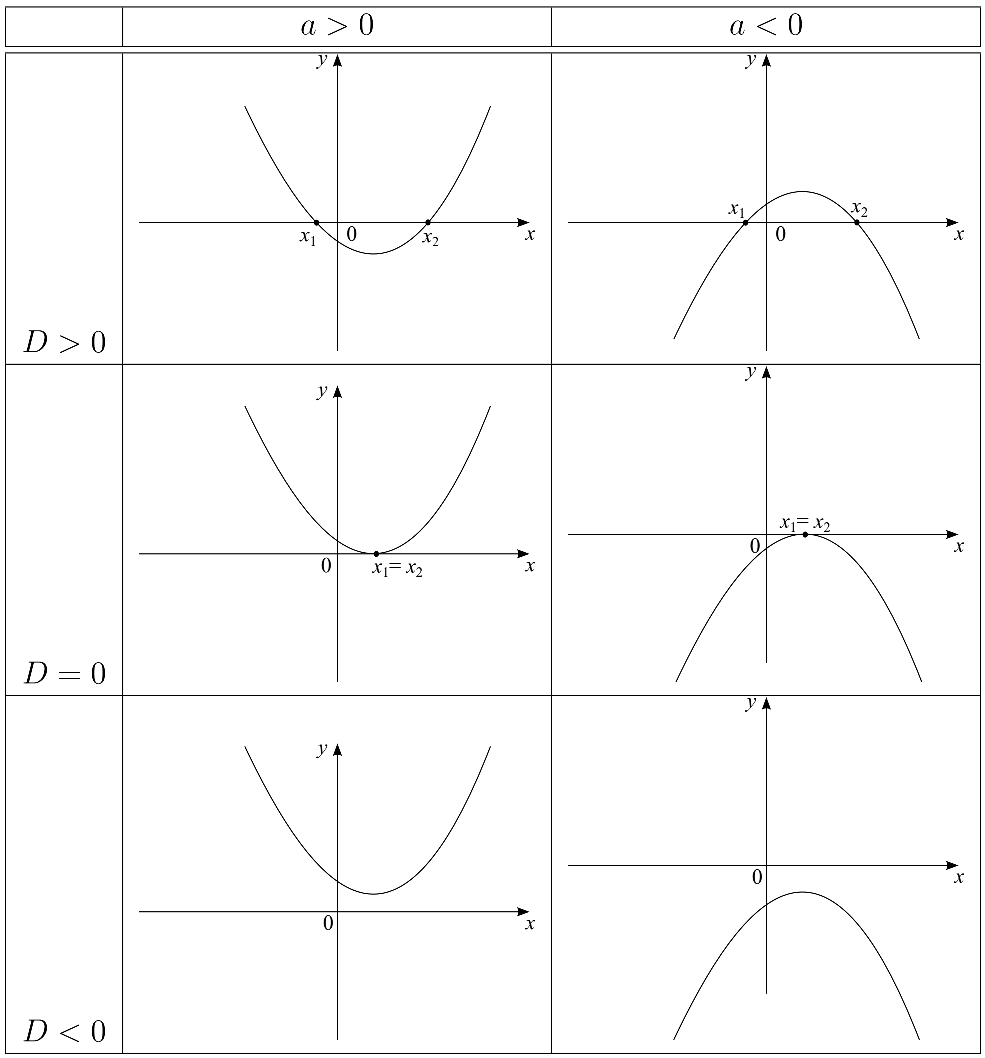
Решени задаци

1. Одредити вредност параметра m тако да функција $y = (m+2)x^2 + (1-m)x + m$, достиже максималну вредност за $x = 2$.

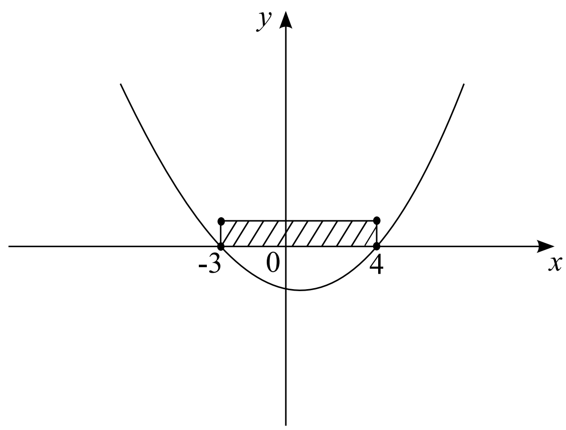
Решење: Да би функција имала максималну вредност за $x = 2$ неопходно је да коефицијент уз x^2 буде позитиван и да је x-координата темена параболе једнака 2. То значи да $m + 2 > 0$ и $-\frac{b}{2a} = -\frac{1-m}{2(m+2)} = 2$. Решавајући другу једначину добијамо решење $m = -3$ које након провере услова $m + 2 > 0$ прихватамо као решење.

2. Одредити вредност параметра m тако да функција $f(x) = (1 + m)x^2 - (4 + m)x + 8$ има вредност -7 за $x = 3$.

Решење: Заменом у функцију $f(3) = (1 + m)3^2 - (4 + m) \cdot 3 + 8 = -7$ добијамо да је $m = -2$.



Сл. 9: График квадратне функције $f(x) = ax^2 + bx + c$ у зависности од дискриминанте и коефицијента уз x^2.



Сл. 10: График функције $f(x) = x^2 - x - 12$.

3. У једначини $4x^2 + mx + m^2 - 15 = 0$ одредити параметар m тако да решења једначине буду једнака.

Решење: Услов да решења буду једнака је да дискриминанта буде једнака нули па имамо једначину $D = m^2 - 4 \cdot 4 \cdot (m^2 - 15) = -15m^2 + 240 = 0$ одакле добијамо да је $m = \pm 4$.

4. У функцији $y = x^2 + px + q$ одредити параметре p и q тако да функција има нуле -2 и 3.

Решење: На основу Вијетових формула $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ добијамо да је $-2 + 3 = -\frac{p}{1}$ тј. $p = -1$. Користећи Вијетову формулу за производ нула функције $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ добијамо $-2 \cdot 3 = \frac{q}{1}$ тј. $\Leftrightarrow q = -6$.

5. Решити неједначину $x^2 - x - 12 \leq 0$.

Решење:
Први начин: Леву страну неједначине записаћемо у облику производа, па се добија неједначина $(x - 4)(x + 3) \leq 0$ која је еквивалентна $(x + 3 \geq 0 \wedge x - 4 \leq 0) \vee (x + 3 \leq 0 \wedge x - 4 \geq 0)$ тј. $-3 \leq x \leq 4$.
Други начин: Можемо користити график функције $y = (x-4)(x+3)$ за утврђивање њеног знака (сл: 10). Нуле функције су -3 и 4 и коефицијент уз x^2 је позитиван па лако можемо скицирати график функције и одатле одредити решење неједначине.

Трећи начин: Како је функција $y = (x-4)(x+3)$ можемо да одредимо знак производа користећи чињеницу да производ два чиниоца истог знака даје позитиван резултат а производ два чиниоца различитог знака даје негативан резултат.

	$x \in (-\infty, -3)$	$x = -3$	$x \in (-3, 4)$	$x = 4$	$x \in (4, +\infty)$
$x+3$	-	0	$+$	$+$	$+$
$x-4$	-	-	-	0	$+$
$(x-4)(x+3)$	$+$	0	-	0	$+$

Из табеле одређујемо интервал где је функција негативна чиме добијамо исти резулат тј. $x \in [-3, 4]$.

6. Решити неједначину $\frac{2x+3}{x-1} \leq 0$.

Решење: Користећи таблицу

	$x \in (-\infty, -\frac{3}{2})$	$x = -\frac{3}{2}$	$x \in (-\frac{3}{2}, 1)$	$x = 1$	$x \in (1, +\infty)$
$2x+3$	-	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	-	-	-	0	$+$
$(x-4)(x+3)$	$+$	0	-	недефинисано	$+$

добијамо решење $x \in [-\frac{3}{2}, 1)$.

7. Решити неједначину $\frac{x+1}{x-3} \geq 2$.

Решење: Полазна неједначина је еквивалентна неједначини $\frac{x+1}{x-3} - 2 \geq 0$ тј. $\frac{x-7}{x-3} \leq 0$.
Користећи таблицу

	$x \in (-\infty, 3)$	$x = 3$	$x \in (3, 7)$	$x = 7$	$x \in (7, +\infty)$
$x-7$	-	-	-	0	$+$
$x-3$	-	0	$+$	$+$	$+$
$(x-4)(x+3)$	$+$	недефинисано	-	0	$+$

добијамо решење $x \in (3, 7]$.

8. Решити неједначину $\frac{(x+2)(x-1)(x-3)}{x(x+1)} \leq 0$.

Решење: Означимо са $f(x)$ леву страну неједначине. Користећи таблицу

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, \infty)$
$x+2$	-	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	-	-	-	-	-	-	-	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	$+$
x	-	-	-	-	-	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	-	-	-	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	-	0	$+$	недеф	-	недеф	$+$	0	-	0	$+$

добијамо решење $x \in (-\infty, -2] \cup (-1, 0) \cup [1, 3]$.

9. У ком интервалу се мора налазити реалан број m да би решења једначине $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ била у интервалу $[-2, 4]$?

Решење: Решења једначине су $x_{1,2} = \frac{2m \pm \sqrt{4m^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m^2 - 1)}}{2} = m \pm 1$, а из услова $x_1 = m - 1 \geq 2$ и $x_2 = m + 1 \leq 4$ следи $-1 \leq m \leq 3$.

10. У функцији $y = (m-1)x^2 + (m-4)x - (m+1)$ одредити параметар m тако да функција постиже најмању вредност за $x = 1$.

Решење: Како је $-\frac{m-4}{2(m-1)} = 1$ следи да је $m = 2$.

Задаци за вежбу

1. Одредити вредност параметра b тако да функција $y = 2x^2 + bx - 3$ има минимум за $x = \frac{5}{4}$.
   Резултат: $b = -5$.

2. У једначини $(k-1)x^2 - 2kx - k + 3 = 0$ наћи k тако да збир квадрата корена једначине буде једнак квадрату њиховог производа.
   Резултат: $k = 1 \vee k = -\frac{3}{5}$.

3. Наћи оне вредности параметра m за које је неједначина $(m-1)x^2 + (m-1)x - 2 < 0$ задовољена за свако $x \in \mathbb{R}$.
   Резултат: $m \in (-7, 1]$.

4. Решити неједначину: $x^2 + 6 \leq 5x$.
   Резултат: $x \in [2, 3]$.

5. Решити неједначину: $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$.
   Резултат: $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

6. Решити неједначину: $\frac{3}{x-1} < \frac{2}{2x+6}$.
   Резултат: $x \in (-\infty, -\frac{17}{4}) \cup (-\frac{5}{2}, 1)$.

6.1 Једначине са једном непознатом које се своде на квадратну

Биквадратне једначине

Једначина облика $ax^4 + bx^2 + c = 0$ назива се биквадратном једначином. Она је еквивалентна једначини $a(x^2)^2 + bx^2 + c = 0$, која је квадратна у односу на x^2. Применом смене $x^2 = t$ добија се квадратна једначина $at^2 + bt + c = 0$.

Симетричне једначине

Симетрична једначина четвртог степена је једначина која је облика $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, која се решава дељењем са x^2, а затим увођењем смене $x + \frac{1}{x} = t$.

Биномне једначине

Једначина облика $ax^n \pm b = 0$ назива се биномном једначином $(a, b>0)$. За $n = 3$ добија се биномна једначина трећег степена $ax^3 \pm b = 0$. Сменом $y = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, где је y нова непозната, биномна једначина трећег степена постаје $y^3 \pm 1 = 0$, што је еквивалентна једначини $(y \pm 1)(y^2 \mp y + 1) = 0$.

Решени задаци

1. Решити једначину $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Решење: Увођењем смене $x^2 = t$, добијамо једначину $t^2 - 13t + 36 = 0$. Решење ове једначине је $t_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2}$. Одавде добијамо да је $t_1 = 9$ или $t_2 = 4$. Враћањем смене добијамо две једначине $x^2 = 9$ и $x^2 = 4$, чијим решавањем добијамо $x_1 = 3$, $x_2 = -3$, $x_3 = 2$ и $x_4 = -2$.

2. Решити једначину $x^4 - (m^2 + n^2)x^2 + m^2n^2 = 0$.

Решење: Увођењем смене $x^2 = t$, добијамо квадратну једначину $t^2 - (m^2 + n^2)t + m^2n^2 = 0$. Решење ове једначине је

$$t_{1,2} = \frac{+(m^2+n^2) \pm \sqrt{(m^2+n^2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m^2n^2}}{2} =$$
$$= \frac{+(m^2+n^2) \pm \sqrt{m^4 - 2m^2n^2 + n^4}}{2} =$$
$$= \frac{(m^2+n^2) \pm \sqrt{(m^2-n^2)^2}}{2} =$$

$$= \frac{(m^2+n^2)\pm\left(m^2-n^2\right)}{2}$$

због симетрије се добијају два пара симетричних решења: $t_1 = x^2 = m^2$ и $t_2 = x^2 = n^2$. Одавде добијамо $x_1 = m$, $x_2 = -m$, $x_3 = n$ и $x_4 = -n$.

3. Решити једначину $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$.

Решење: Дељењем са x^2 добијамо $6x^2 - 35x + 62 - \frac{35}{x} + \frac{6}{x^2} = 0$ која је еквивалентна једначини $6(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 35(x + \frac{1}{x}) + 6 = 0$. Увођењем смене $x + \frac{1}{x} = t$ добијамо $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = t^2$ тј. $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$. Добићемо квадратну једначину $6t^2 - 35t + 50 = 0$. Решавањем те квадратне једначине добијамо $t = \frac{10}{3} \vee t = \frac{5}{2}$. Враћањем смене добијамо две једначине $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$ и $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$. Из прве једначине добијамо $x^2 - \frac{10}{3}x + 1 = 0$, одакле добијамо $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$. Из друге једначине добијамо $x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$ одакле добијамо $x_3 = 2$, $x_4 = \frac{1}{2}$.

4. Решити једначину $x^4 - 1 = 0$.

Решење: Дата једначина је биномна и можемо је записати на следећи начин $(x-1)(x+1)(x^2+1) = 0$, што значи да једначина има реална решења $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$, као и пар коњуговано комплексних решења $x_{3,4} = \pm i$.

5. Решити једначину $x^6 - 729 = 0$.

Решење: Леву страну полазне једначине можемо записати као разлику квадрата $(x^3 - 27)(x^3 + 27) = 0$, одакле добијамо једначине $x^3 - 27 = 0$ или $x^3 + 27 = 0$. Решавањем прсве једначине добијамо једно реално решење $x_1 = 3$ и пар коњуговано комплексних решења $x_{2,3} = \frac{3}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$. Решавањем друге једначине добијамо једно реално решење $x_4 = -3$ и пар коњуговано комплексних решења $x_{5,6} = \frac{3}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$.

Задаци за вежбу

1. Решити једначину $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$.
   Резултат: Решења су $x_{1,2} = \pm 5$, $x_{3,4} = \pm 3$.

2. Решити једначину $a^2x^4 - (a^2 + b^2)x^2 + a^2b^2 = 0$.
   Резултат: Решења једначине су: $x_{1,2} = \pm\frac{b}{a}$, $x_{3,4} = \pm a$ ако је $a \neq 0$. Ако је $a = 0$ и $b \neq 0$ решење је $x = 0$, а ако су $a = b = 0$ решење је свако $x \in \mathbb{R}$.

3. Решити једначину $4x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 3x + 9 = 0$.
Резултат: Решења једначине су: $x_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{5}}{2}$, $x_{3,4} = \frac{-3 \pm i\sqrt{15}}{4}$.

4. Решити једначину $x^4 + 1 = 0$.
Резултат: Решења једначине су: $x_{1,2} = \frac{\sqrt{2}(-1 \pm i)}{2}$, $x_{3,4} = \frac{\sqrt{2}(1 \pm i)}{2}$.

7 Ирационалне једначине и неједначине

Ирационалне једначине су оне једначине у којима се непозната налази у основи неког степена чији изложилац није цели број. Нпр. $x^{\frac{1}{2}} = 7$, $(x^2+1)^{\frac{1}{2}} = 4$, $(x+1)^{\frac{1}{2}} = x+2$, $\sqrt{x^2-5x+2} = x-3$ итд. Важе следеће еквиваленције:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow (f(x) = (g(x))^2 \wedge f(x) \geq 0 \wedge g(x) \geq 0,$$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow (f(x) < (g(x))^2 \wedge f(x) \geq 0 \wedge g(x) \geq 0,$$

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow [(f(x) > (g(x))^2 \wedge g(x) \geq 0] \vee [g(x) < 0 \wedge f(x) \geq 0] .$$

Решени задаци

1. Решити једначину $x - \sqrt{11+x^2} = 11$.

Решење:

$$\begin{aligned} & x - \sqrt{11+x^2} = 11 \Leftrightarrow \\ & \quad \Leftrightarrow -\sqrt{11+x^2} = 11 - x \Leftrightarrow \\ & \quad \Leftrightarrow \sqrt{11+x^2} = x - 11 \Leftrightarrow \\ & \quad \Leftrightarrow (11+x^2 = x^2 - 22x + 121) \wedge (11 + x^2 \geq 0) \wedge (x - 11 \geq 0) \Leftrightarrow \\ & \quad \Leftrightarrow 22x = 110 \wedge (11 + x^2 \geq 0) \wedge (x - 11 \geq 0) \Leftrightarrow \\ & \quad \Leftrightarrow x = 5 \wedge (11 + x^2 \geq 0) \wedge (x - 11 \geq 0). \end{aligned}$$

Видимо да не важи неједнакост $5 - 11 \geq 0$ па одатле закључујемо да једначина нема решења. Задатак смо могли решити квадрирањем и без писања услова, уврштавањем добијених решења полазну једначину и провером да ли важи једнакост. Тиме би добили $5 - \sqrt{11+5^2} = 5 - \sqrt{36} = -1 \neq 11$, што значи да би и овим поступком одбацили решење.

2. Решити једначину $\sqrt{x-3} = 5 - x$.

Решење: Квадрирањем једначине и њеним даљим сређивањем добијамо

$$x - 3 = (5-x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 28 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = 7.$$

Прво решење прихватамо јер уврштавањем у полазну једначину добијамо $\sqrt{4-3} = 5 - 4$, а друго одбацујемо зато што уврштавањем у полазну једначину добијамо $\sqrt{7-3} \neq 5 - 7$.

3. Решити једначину $\sqrt{x-9} - \sqrt{x-18} = 1$.

Решење: Квадрирањем еквивалентне једначине $\sqrt{x-9} = 1 + \sqrt{x-18}$ добијамо $4 = \sqrt{x-18}$. Поновним квадрирањем добијамо $16 = x - 18$ тј. $x = 34$ јер уврштавањем у полазну једначину показујемо да решење прихватамо $\sqrt{34-9} - \sqrt{34-18} = 5 - 4 = 1$.

4. Решити једначину $\sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2}} = x - 1$.

Решење: Услови које решење мора да задовољи су $x - 1 \geq 0$ што је еквивалентно $x \geq 1$, $x^4 - x^2 = x^2(x^2-1) \geq 0$ што је еквивалентно $x^2 - 1 \geq 0$ и $1 - \sqrt{x^4 - x^2} \geq 0$. Квадрирањем полазне једначине добијамо
$1 - \sqrt{x^4 - x^2} = x^2 - 2x + 1$ што је еквивалентно једначини $\sqrt{x^4 - x^2} = x(2 - x)$. Поновним квадрирањем добијамо $x^2(x^2 - 1) = x^2(2 - x)^2$ што је еквивалентно $\Leftrightarrow x^2(x^2 - 1 - 4 + 4x - x^2) = 0$ тј. $x^2(4x - 5) = 0$. Одавде добијамо два потенцијална решења $x = 0$ і $x = \frac{5}{4}$. Провером постављених услова добијамо да се прихвата само друго па је једино решење једначине $x = \frac{5}{4}$.

5. Решити неједначину $\sqrt{x+5} > x - 1$.

Решење: Решење неједначине чине два скупа

> Сви реални бројеви x такви да је $x+5 \geq 0$ и $x-1 < 0$, тј. $x \in [-5, 1)$
>
> Сви реални бројеви x такви да важи $x - 1 \geq 0$ и $x + 5 > (x-1)^2$ што је еквивалентно систему неједначина $x \geq 1 \wedge 0 > x^2 - 3x - 4$. Решавањем квадратне неједначине добијамо да је $x \in (-1, 4)$ што у пресеку са $x \geq 1$ даје да $x \in [1, 4)$.

Скуп решења неједначине је унија добијених скупова тј.
$[-5, 1) \cup [1, 4) = [-5, 4)$.

6. Решити неједначину $\sqrt{x+10} > x - 2$

Решење: Решење неједначине чине два скупа

> Сви реални бројеви x такви да је $x + 10 \geq 0$ и $x - 2 < 0$, тј.
> $x \in [-10, 2)$
>
> Сви реални бројеви x такви да важи $x - 2 \geq 0$ и $x + 10 > (x-2)^2$ што је еквивалентно систему неједначина $x \geq 2 \wedge 0 > x^2 - 5x - 6$. Решавањем квадратне неједначине добијамо да је $x \in (-1, 6)$ што у пресеку са $x \geq 2$ даје да $x \in [2, 6)$.

Скуп решења неједначине је унија добијених скупова тј.
$[-10, 2) \cup [2, 6) = [-10, 6)$.

Задаци за вежбу

1. Решити једначину $\frac{\sqrt{x+2}}{2} = x - 1$.
   Резултат: $x = 2$.

2. Решити једначину $\sqrt{2x+1} = x - 1$.
   Резултат: $x = 4$.

3. Решити једначину $\sqrt{x-1} = x - 3$.
   Резултат: $x = 5$.

4. Решити једначину $\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{2x-2}} = \frac{\sqrt{3x-5}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-3}}$.
   Резултат: $x = 3$.

5. Решити неједначину $\sqrt{x+4} < x - 2$.
   Резултат: Скуп решења неједначине је$(2, 5)$.

6. Решити неједначину $\sqrt{2x^2 - 7x + 3} \geq 0$.
   Резултат: $x \in (-\infty, \frac{1}{2}] \cup [3, \infty)$.

7. Решити неједначину $\sqrt{x^2 - x - 12} < x$.
   Резултат: $x \in [3, \infty)$.

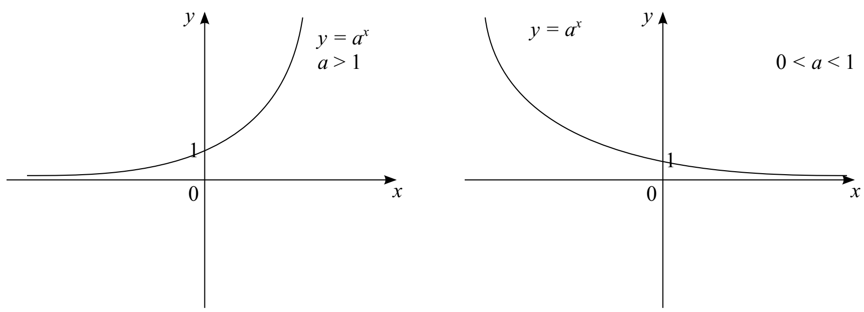
8. Решити једначину $(2x-4)^{\frac{1}{2}} - (x+5)^{\frac{1}{2}} = 1$.
   Резултат: Решење једначине је $x = 20$.

9. Решити једначину $\sqrt{x} + \sqrt{x+9} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+4}$.
   Резултат: Решење једначине је$x = 0$.

8 Експоненцијалне једначине и неједначине.

8.1 Експоненцијална функција

Функција облика $f(x) = a^x$, $(a > 0, a \neq 1)$ се назива експоненцијалном функцијом. Област дефинисаности је $D = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Ако је $a > 1$ тада је функција растућа, а ако је $0 < a < 1$ тада је функција опадајућа. Графици експоненцијалних функција у зависности од параметра a су дати на следећој слици.



Сл. 11: График функције $y = a^x$, у зависности од параметра a.

8.2 Експоненцијалне једначине и неједначине

Експоненцијалне једначине су једначине код којих се непозната налази у изложиоцу (експоненту) степена. При решавању експоненцијалних једначина користимо особину експоненцијалне функције да је строго монотона (и тиме 1-1) па важи $a^{x_1} = a^{x_2}$ ако и само ако $x_1 = x_2$.

Експоненцијална неједначина $a^{f(x)} > b$ за $b \leq 0$ је задовољена на домену функције $a^{f(x)}$, тј. у свим тачкама домена функције $f(x)$ зато што су вредности експоненцијалне функције увек позитивне.

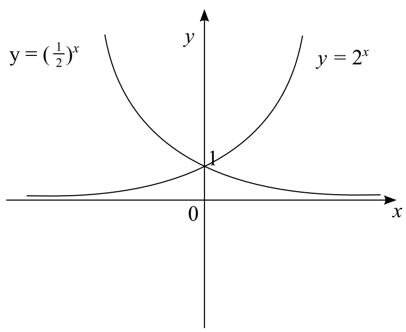
Експоненцијална неједначина $a^{f(x)} > b$, за $b > 0$ и $a > 1$, је задовољена у оним тачкама домена функције $f(x)$ за које важи $f(x) > \log_a b$.

Експоненцијална неједначина $a^{f(x)} > b$, за $b > 0$ и $0 < a < 1$, је задовољена у оним тачкама домена функције $f(x)$ за које важи $f(x) < \log_a b$.

Решени задаци

1. Нацртати графике функција $y = 2^x$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ у истом Декартовом координатном систему.

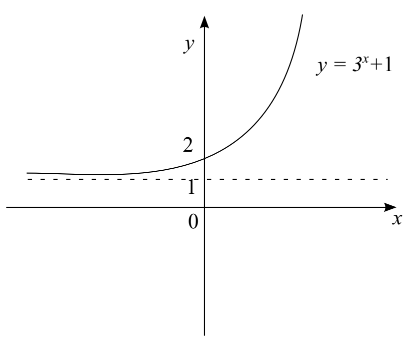
Решење: Тражени графици се могу видети на слици 12.



Сл. 12: Графици функција $y = 2^x$ и$\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

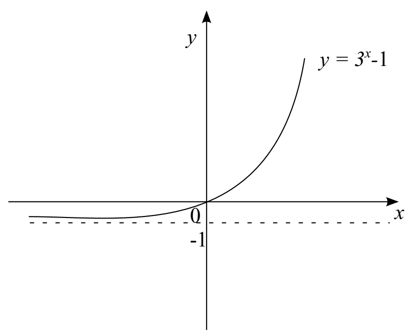
2. Скицирати графике функција $y = 3^x + 1$ и $y = |3^x - 1|$.

Решење: График функције $y = 3^x + 1$ се добија када график функције $y = 3^x$ транслирамо на горе за 1 (сл. 13)

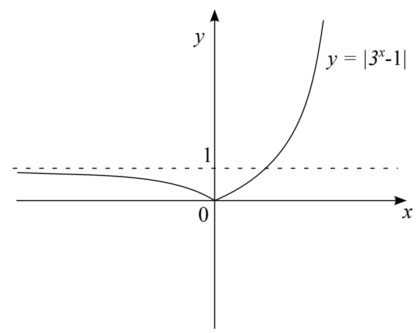


Сл. 13: График функције $y = 3^x + 1$.

График функције $y = |3^x - 1|$ се добија када график функције $y = 3^x$ транслирамо на доле за 1 (сл. 14), и потом делове коју су испод x-осе пресликамо симетрично у односу на ту осу (сл. 15)



Сл. 14: График функције
$y = 3^x - 1$.



Сл. 15: График функције
$y = |3^x - 1|$.

3. Решити једначине:
   а) $2^{x-1} = 4^5$,
   б) $9^{-3x} = \left(\frac{1}{27}\right)^{x+3}$,
   в) $3^{\frac{x-1}{2}} - 2^{\frac{x+1}{3}} = 2^{\frac{x-2}{3}} + 3^{\frac{x-3}{2}}$,
   г) $0,125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$,
   д) $10 \cdot 2^x - 4^x = 16$,
   е) $2 \cdot 3^{x+1} - 5 \cdot 9^{x-2} = 81$.

Решење:

а) Најпре би требало изразе са леве и десне стране једнакости довести до истих основа, па тако $2^{x-1} = 4^5$ постаје еквивалентно са $2^{x-1} = (2^2)^5$ тј. $2^{x-1} = 2^{10}$. Користећи чињеницу да је експоненцијална функција 1-1 добијамо да једначину $x - 1 = 10$ чије је решење $x = 11$.

б) На сличан начин као у претходном задатку из $9^{-3x} = \left(\frac{1}{27}\right)^{x+3}$ добијамо $(3^2)^{-3x} = (3^{-3})^{x+3}$ тј. $3^{-6x} = 3^{-3x-9}$. Претходна једначина је еквивалентна једначини $-6x = -3x - 9$ чије је решење $x = 3$.

в) Из $3^{\frac{x-1}{2}} - 2^{\frac{x+1}{3}} = 2^{\frac{x-2}{3}} + 3^{\frac{x-3}{2}}$ добијамо $3^{\frac{x-1}{2}} - 3^{\frac{x-3}{2}} = 2^{\frac{x-2}{3}} + 2^{\frac{x+1}{3}}$ тј. $3^{\frac{x-3}{2}}(3-1) = 2^{\frac{x-2}{3}}(2+1)$. Из претходне једначине добијамо да је $2 \cdot 3^{\frac{x-3}{2}} = 3 \cdot 2^{\frac{x-2}{3}}$ тј. $3^{\frac{x-3}{2}} \cdot 3^{-1} = 2^{\frac{x-3}{3}} \cdot 2^{-1}$. Претходна једначина је еквивалентна $3^{\frac{x-5}{2}} = 2^{\frac{x-5}{3}}$ тј, $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{x-5} = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{x-5}$. Добијену једначину можемо записати као $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\right)^{x-5} = 1$ што је еквивалентно $x - 5 = 0$ чије је решење $x = 5$.

г) Из $0,125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$ добијамо да је $2^{-3} \cdot 2^{4x-6} = \left(2^{-\frac{5}{2}}\right)^{-x}$ тј. $2^{4x-9} = 2^{\frac{5}{2}x}$. Претходна једначина је еквивалентна једначини $4x-9=\frac{5}{2}x$ чије је решење $x=6$.

д) Полазна једначина је еквивалентна $10 \cdot 2^x - 2^{2x} = 16$. Увођењем смене $2^x = t$ добијамо једначину $10t - t^2 = 16$. Решавањем квадратне једначине добијамо два решења $t_1 = 8$ и $t_2 = 2$. Враћањем смене добијамо једначине $2^x = 2^3$ и $2^x = 2^1$ чијем решавањем добијамо решења полазне једначине $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$.

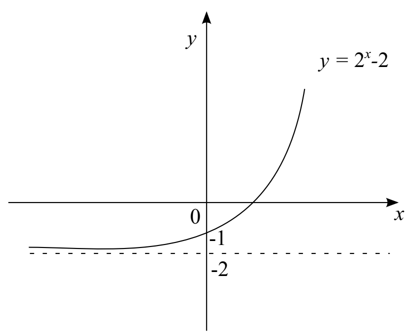
е) Једначина $2 \cdot 3^{x+1} - 5 \cdot 9^{x-2} = 81$ је еквивалентна $2 \cdot 3 \cdot 3^x - 5 \cdot 3^{-4} \cdot 3^{2x} = 81$ тј. $6 \cdot 81 \cdot 3^x - 5 \cdot 3^{2x} - 81^2 = 0$. Увођењем смене $3^x = t$ добијамо једначину $486t - 5t^2 - 81^2 = 0$. Решавањем квадратне једначине добијамо два решења $t_1 = 81$ и $t_2 = \frac{81}{5}$. Враћањем смене добијамо једначине $3^x = 3^4$ и $3^x = \frac{81}{5}$ чијем решавањем добијамо решења полазне једначине $x_1 = 4$ и $x_2 = 4 - \frac{\log 5}{\log 3}$.

4. Решити неједначине:
   а)$5^x - 3^{x+1} > 2\left(5^{x-1} - 3^{x-2}\right)$,
   б) $\left(\frac{1}{4}\right)^{3x-2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{|x+1|}$.

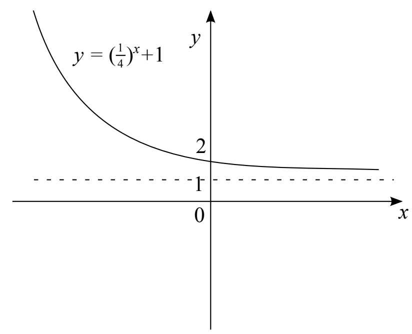
Решење:
а) Дељењем неједначине са 3^x (знамо да је $3^x > 0$ за свако реално x) добијамо да је полазна неједначина еквивалентна $\left(\frac{5}{3}\right)^x - 3 > 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^x - \frac{2}{9}$ тј. $\frac{3}{5}\left(\frac{5}{3}\right)^x > 3 - \frac{2}{9}$. Добијену неједначину можемо записати као $\frac{3}{5}\left(\frac{5}{3}\right)^x > \frac{25}{9}$ тј. $\left(\frac{5}{3}\right)^x > \left(\frac{5}{3}\right)^3$. Како је основа експоненцијалне функције $\frac{5}{3} > 1$ одатле следи да је функција растућа па је решење неједначине $x > 3$.
б) Неједначина $\left(\frac{1}{4}\right)^{3x-2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{|x+1|}$ је еквивалентна $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{3x-2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{|x+1|}$ тј. $\left(\frac{1}{2}\right)^{6x-4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{|x+1|}$. Пошто је основа експоненцијалне функције $\frac{1}{2} < 1$ одатле следи да је функција опадајућа па је полазна неједначина еквивалентна неједначини $6x - 4 \geq |x+1|$. Добијену неједначину решавамо дискусијом по знаку израза $x+1$. Ако је $x+1 \geq 0$ полазна неједначина је еквивалентна неједначини $6x - 4 \geq x + 1$ тј. $5x \geq 5$. Скуп решења $A = [1, \infty)$ пресецамо условом $x \geq -1$ и добијамо $x \in [1, \infty)$. Ако је $x + 1 < 0$ тада је $6x - 4 \geq x + 1$ или $6x - 4 \leq -(x+1)$ тј. $5x \geq 5 \wedge x \geq -1$ или $7x \geq 3 \wedge x < -1$. Решавањем неједначина добијамо $(x \geq 1 \wedge x \geq -1)$ или $x \geq \frac{3}{7} \wedge x < -1$, одакле добијамо да је $x \in [1, \infty)$.

Задаци за вежбу

1. Нацртати графике функција $y = 2^x - 2$ и $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x + 1$.
Резултат: види слике 16 и 17.



Сл. 16: График функције $y = 2^x - 2$.



Сл. 17: График функције $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x + 1$.

2. Решити једначину $\sqrt[x-7]{32^{x+5}} = 0,25 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$.
Резултат: $x = 10$.

3. Решити једначину $2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 450$.
Резултат: $x = 4$.

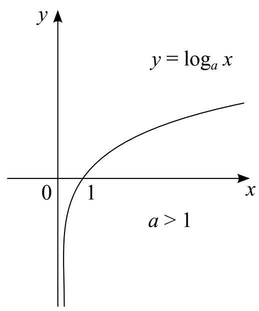
4. Решити једначину $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$.
Резултат: $x_1 = 11$, $x_2 = 3$.

5. Решити једначину $2^{3x} \cdot 3^x - 2^{3x-1} \cdot 3^{x+1} = -288$.
Резултат: $x = 2$.

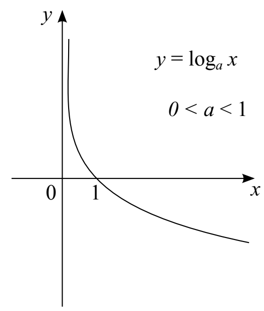
6. Решити неједначину $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x+3|} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{2x-3}$.
Резултат: $x \in (-\infty, 3]$.

9 Логаритамске једначине и неједначине.

Логаритам броја $x > 0$ за дату основу (базу) $a\,(a > 0, a \neq 1)$ у ознаци $\log_a x$, је број c којим треба степеновати основу a да би се добио број x. Према томе, $c = \log_a x \Leftrightarrow a^c = x$ односно $a^{\log_a x} = x$ за $x > 0$.



Сл. 18: График функције
$y = \log_a x$ где је $a > 1$



Сл. 19: График функције
$y = \log_a x$ где је $0 < a < 1$

Основне особине логаритама:

$\log_a 1 = 0,\ a > 0,\ a \neq 1,$

$\log_a a = 1,\ a > 0,\ a \neq 1,$

$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y,\ x, y > 0,$

$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y,\ x, y > 0,$

$\log_a x^\alpha = \alpha \cdot \log_a x,\ x > 0,$

$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a},\ a, b > 0,\ a, b \neq 1,$

$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, a, b > 0,\ a, b \neq 1,$

$\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta} \log_a b,\ a, b > 0,\ a \neq 1.$

Декадни логаритми су логаритми са основом 10 и користимо ознаку $\log_{10} x = \log x$.
Природни логаритми су логаритми са основом $e\,(e = 2.71828...)$,
и користимо ознаку $\log_e x = \ln x$.
Графици логаритамских функција дати су на сликама 18 и 19.

9.1 Логаритамске једначине и неједначине

Логаритамске једначине су једначине код којих се непозната јавља као део аргумента логаритамске функције.
Једначина $\log_a f(x) = b, (a > 0, a \neq 1)$ је еквивалентна једначини $f(x) = a^b$.
Једначина $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, $(a > 0, a \neq 1)$ је еквивалентна систему $f(x) = g(x) \wedge f(x) > 0 \wedge g(x) > 0$.
Неједначина $\log_a f(x) > b$, $(a > 0, a \neq 1)$ је еквивалентна $f(x) > a^b$ ако је $a > 1$, односно $0 < f(x) < a^b$ ако је $0 < a < 1$.

Решени задаци

1. Упростити израз:
   а) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdots \log_7 8$;
   б) $\sqrt[\log_5 9]{81}$;
   в) ако је $\log_{30} 3 = a$ и $\log_{30} 5 = b$, наћи $\log_3 8$.

Решење:
а) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdots \log_7 8 =$
$= \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 6}{\log_2 5} \cdot \frac{\log_2 7}{\log_2 6} \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 7} =$
$= \log_2 8 = 3.$
б) $\sqrt[\log_5 9]{81} = 81^{\frac{1}{\log_5 9}} = \left(9^{\log_9 5}\right)^2 = 5^2 = 25.$
в)

$$\begin{aligned}\log_{30} 8 &= \log_{30} 2^3 = 3\log_{30} 2 = 3\log_{30} \frac{30}{15} = 3\left(\log_{30} 30 - \log_{30} 15\right) \\ &= 3\left(1 - \log_{30} 3 \cdot 5\right) = 3\left(1 - \log_{30} 3 - \log_{30} 5\right) = 3(1 - a - b).\end{aligned}$$

.

2. Решити једначине
   а) $\log_{\frac{1}{2}} x = 3$,
   б) $x^{1+\log_3 x} = 9$,
   в) $\log\left(x(x+9)\right) = 1$,
   г) $\log_3 x + \log_9 x + \log_{81} x = 7$,
   д) $\log_4(x+12) \cdot \log_x 2 = 1$,
   ђ)$\log_{49} x^2 + \log_7(x-1) = \log_7(\log_{\sqrt{3}} 3)$,
   е) $50^{\log x} \cdot 160^{\log x} = 400$.

Решење:

а) На основу дефиниције логаритма једначина $\log_{\frac{1}{2}} x = 3$ је еквивалентна $x = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$,

б) Логаритмовањем са основом 3 леве и десне стране израза $x^{1+\log_3 x} = 9$ добијамо $(1 + \log_3 x) \cdot \log_3 x = \log_3 3^2 = 2$. Увођењем смене $\log_3 x = t$ добијамо једначину $(1+t)t = 2$ тј. $t^2 + t - 2 = 0$, чија су решења $t_1 = 1$ и $t_2 = -2$. Враћањем смене добијамо $\log_3 x = 1$ тј. једно решење је $x = 3$ и $\log_3 x = -2$ тј. друго решење је $x = 3^{-2} = \frac{1}{9}$,

в) Једначина еквивалентно $\log_{10}(x(x+9)) = \log_{10} 10$ што је еквивалентно систему $x(x+9) = 10 \wedge x(x+9) > 0$. Решавањем једначине $x^2+9x+10 = 0$ добијамо решења $x_1 = 1$ и $x_2 = -10$. За добијена решења проверавамо да ли је задовољена неједначина $x(x+9) > 0$ и на основу тога прихватамо оба решења. Проверу можемо да изведемо и тако што добијене резултате уврстимо у полазну једначину и ако добијемо једнакост резултат прихватамо као решење а ако не онда га одбацујемо.

г) На основу особине логаритма $\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta} \log_a b$ полазна једначина је еквивалентна $\log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{1}{4} \log_3 x = 7$ тј. $\frac{7}{4} \log_3 x = 7$. Одатле добијамо $\log_3 x = 4$ што је еквивалентно систему $x = 3^4 = 81 \wedge x > 0$. Како добијено решење задовољава услов $x > 0$ решење прихватамо.

д) За једначину $\log_4(x+12) \cdot \log_x 2 = 1$ услови који произлазе из дефинисаности функција су $x+12 > 0$, $x > 0$ и $x \neq 1$. За добијене резултате морамо проверити испуњеност ових услова. Из $\log_4(x + 12) \cdot \log_x 2 = 1$ добијамо једначину $\log_4(x+12) = \log_2 x$ која је еквивалентна $\frac{1}{2} \log_2(x+12) = \log_2 x$. Из претходне једначине добијамо $\log_2(x + 12) = \log_2 x^2$ тј. једначину $x + 12 = x^2$ чија су решења $x_1 = 4$ и $x_2 = -3$. Провером почетних услова добијамо да је решење само $x = 4$.

ђ) За једначину $\log_{49} x^2 + \log_7(x - 1) = \log_7(\log_{\sqrt{3}} 3)$, услови су $x \neq 0$ и $x - 1 > 0$. Одатле добијамо $\log_{7^2} x^2 + \log_7(x - 1) = \log_7(\log_{3^{1/2}} 3)$ која је еквивалентна једначини $\frac{1}{2} \log_7 x^2 + \log_7(x - 1) = \log_7(2 \log_3 3)$. Одавде добијамо једначину $\log_7 x(x - 1) = \log_7 2$ уз услов да је $x > 0$. Из претходне једначине добијамо квадратну једначину $x^2 - x = 2$ чија су решења $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$. Провером почетних услова одбацујемо први резултат па је решење једначине $x = 2$.

е) Логаритмовањем обе стране једначине $50^{\log x} \cdot 160^{\log x} = 400$ декадним логаритмом добијамо једначину $\log 8000^{\log x} = \log 400$ која је еквивалентна $\log x \cdot \log 8000 = \log 400$ тј. $\log x = \frac{\log 400}{\log 8000} = \frac{2+2\log 2}{3+3\log 2} = \frac{2}{3}$. Одатле је $x = 10^{\frac{2}{3}}$.

3. Решити неједначине:

а) $\log(2x+3) \leq 1$,
б) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+2} > 1$,
в) $\log(x+1) < \log(2x-1)$.

Решење:
а) полазна неједначина је еквивалентна неједначини $\log(2x+3) \leq \log 10$ а она је еквивалентна систему $2x+3 \leq 10 \wedge 2x+3 > 0$, који је еквивалентан систему $x \leq \frac{7}{2} \wedge x > -\frac{3}{2}$. Из добијених неједначина добијамо да је решење $x \in (-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}]$.
б) Пошто је основа логаритма мања од 1 полазна неједначина је еквивалентна $0 < \frac{3x-1}{x+2} < \frac{1}{3}$ тј. $0 < \frac{3x-1}{x+2} \wedge \frac{3x-1}{x+2} < \frac{1}{3}$. Решавањем прве неједначине добијамо да $x \in (-\infty, -2) \cup (\frac{1}{3}, +\infty) = A$ а друга је еквивалентна $\frac{8x-5}{x+2} < 0$ тј. $x \in \left(-2, \frac{5}{8}\right) = B$. Решење полазне неједначине је пресек скупова A и B, тј. $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{8}\right)$.
в) Полазна неједначина је еквивалентна систему $(x+2 < 2x-1 \wedge x+2 > 0 \wedge 2x-1 > 0)$ који је еквивалентан систему $\left(3 < x \wedge x > -2 \wedge x > \frac{1}{2}\right)$. Пресеком добијених скупова добијамо да је скуп решења неједначине $x \in (3, \infty)$.

Задаци за вежбу

1. Решити једначине
   а) $\log_2(x-4) = 3$.
   Резултат: $x = 12$,
   б) $\frac{\log x}{\log x - \log 3} = 2$.
   Резултат:$x = 9$,
   в) $1 + \sqrt{\log^2 x - 1} = \log x$.
   Резултат: $x = 10$,
   г) $2x^2 = (2x+5) \log_x 4 \cdot \log_8 x$.
   Резултат: $x = \frac{5}{3}$.

2. Решити неједначине:
   а) $\log_x(x+2) > 2$.
   Резултат: $x \in \emptyset$,
   б) $\log_8(x^2 - 4x + 3) < 1$.
   Резултат: $x \in (-1, 1) \cup (3, 5)$,
   в) $\log \sqrt{2-x} - \log \sqrt{4-x^2} + 3 \log \sqrt{2+x} < 2$.
   Резултат: $x \in (-2, 2)$,

г) $\log_{\frac{1}{2}} \log_8 \frac{x^2-2x}{x-3} < 0.$
Резултат: $x \in (3,4) \cup (6,\infty)$.

10 Тригонометрија

10.1 Основни појмови у тригонометрији и основни тригонометријски идентитети

Тригонометријске функције оштрог угла

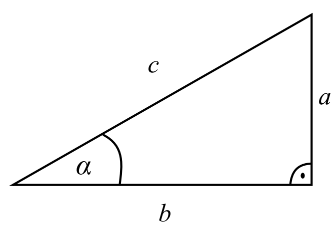
Ако је α оштар угао правоуглог троугла $\triangle ABC$ (сл. 20) тада је

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{дужина наспрамне катете}}{\text{дужина хипотенузе}}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{дужина налегле катете}}{\text{дужина хипотенузе}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{дужина наспрамне катете}}{\text{дужина налегле катете}}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{дужина налегле катете}}{\text{дужина наспрамне катете}}$$

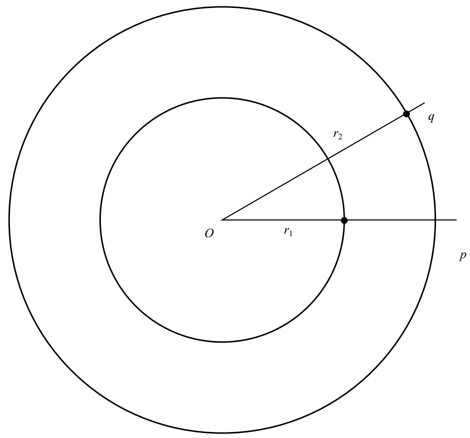


Сл. 20: Правоугли троугао $\triangle ABC$.

Нека је $\angle pOq$ централни угао круга $k_1(O, r_1)$, и нека је $k_2(O, r_2)$ било који њему концентрични круг (сл. 21). Однос кружног лука у области угла и одговарајућег полупречника круга је сталан, тј. $\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_2}{r_2}$. Специјално, ако је $\frac{l}{r} = 1$, тј. ако је дужина лука l једнака дужини одговарајућег полупречника r, тада кажемо да одговарајући угао има меру један радијан (у ознаци 1 rad или само 1).

У следећој табели дате су радијанске и одговарајуће степене мере неких углова

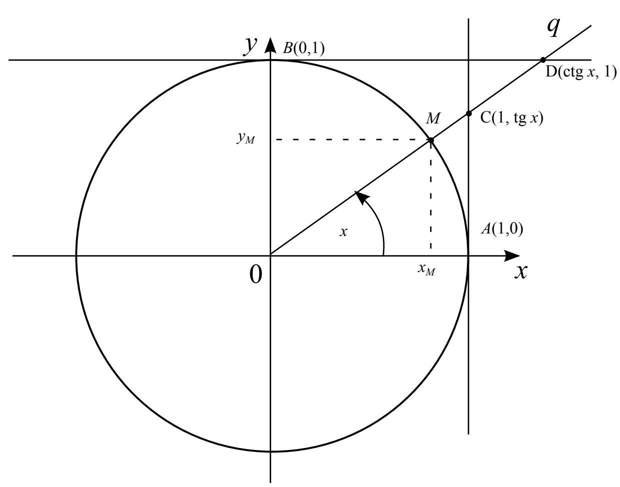
радијанска мера	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
степена мера	0	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°



Сл. 21: Концентрични кругови $k_1(O, r_1)$ и $k_2(O, r_2)$.

Вредности тригонометријских функција неких углова

Круг полупречника 1 са центром у координатном почетку назива се тригонометријски круг (сл. 22).



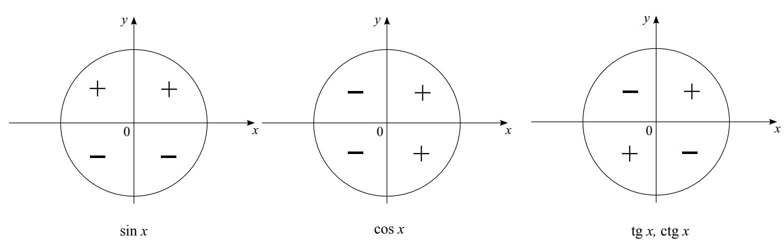
Сл. 22: Тригонометријски круг

По дефиницији је $\sin x = x_M$, $\cos x = y_M$, $\operatorname{tg} x = \frac{x_M}{y_M}$, $y_M \neq 0$ и $\operatorname{ctg} x = \frac{y_M}{x_M}$, $x_M \neq 0$.
Положај другог крака Oq неће се променити после ротације за пуни

угао (2π), а однос $\frac{x_M}{y_M}$ и $\frac{y_M}{x_M}$ се неће променити за ротацију од половине пуног угла (π), па на основу претходне дефиниције следи да су функције $y = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ и $y = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ периодичне са основним периодом 2π, а функције $y = \operatorname{tg} x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ и $y = \operatorname{ctg} x$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ периодичне са основним периодом π. У следећој табли су дате вредности елементарних тригонометријских функција за неке основне углове. Ако нека од функција није дефинисана за дату меру угла, онда стоји знак „-“.

$f(x) \setminus x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
$\operatorname{ctg} x$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0	–

Предзнаке тригонометријских функција произвољног угла видимо на слици 23



Сл. 23: Знак неких тригонометријских функција

Свођење тригонометријских функција произвољног угла на тригонометријске функције оштрог угла

С обзиром да су тригонометријске функције периодичне, то се вредности ових функција за произвољан угао могу изразити помоћу вредности тригонометријских функција за оштар угао:

$$
\begin{array}{ll}
\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha,\ k\in\mathbb{Z}, & \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,\\
\cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha,\ k\in\mathbb{Z}, & \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,\\
\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha, & \sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\cos\alpha,\\
\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha, & \cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\sin\alpha,\\
\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha, & \sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha,\\
\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha, & \cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha,\\
\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha, & \sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\cos\alpha,\\
\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha, & \cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha.
\end{array}
$$

Користећи наведене формуле, добијамо да за угао $0-\alpha$ важи $\sin(0-\alpha)=-\sin\alpha$, тј. $\cos(0-\alpha)=\cos\alpha$. За остале тригонометријске функције свођење се врши на основу претходно наведених формула и тригонометријских идентитета.

Основни тригонометријски идентитети

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z},$$

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1,\ k\neq\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z},$$

$$\sin^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{1}=\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+1},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z},$$

$$\cos^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha}{1}=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha+1},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Адиционе формуле:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta},\ \alpha,\beta,\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta},\ \alpha,\beta,\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z},$$

$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta},\alpha,\beta,\alpha+\beta\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z},$

$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta},\alpha,\beta,\alpha+\beta\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z},$

Тригонометријске функције двоструког угла

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,$

$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},\ \alpha,2\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z},$

$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2-1}{2\operatorname{ctg}\alpha},\ \alpha,2\alpha\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

Тригонометријске функције половине угла (знак + или − се бира на основу знака функције у одговарајућем квадранту)

$2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha,\ \ \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$

$2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha,\ \ \sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},$

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},\ \alpha\neq\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z},$

$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}},\ \alpha\neq 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

Трансформација збира и разлике тригонометријских функција у производ и обрнуто

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$

$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$

$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$

$\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\ \alpha,\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z},$

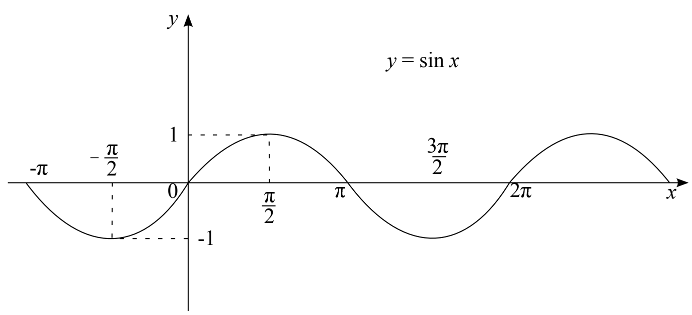
$\operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta},\ \alpha,\ \beta\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z},$

$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right],$

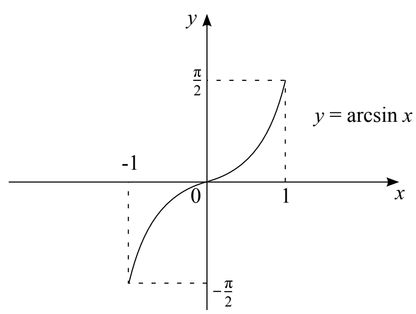
$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right],$

$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right].$

Графици основних тригонометријских функција и одговарајућих инверзних тригонометријских функција (сл. 24-31).



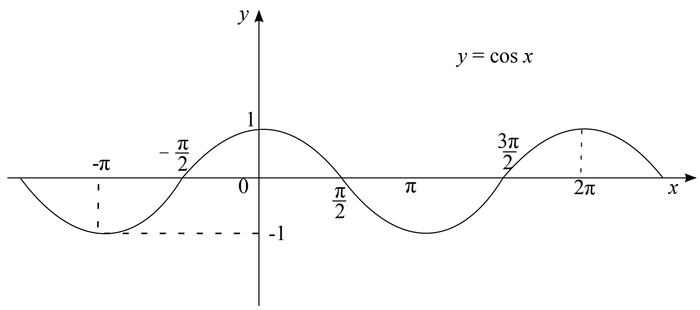
Сл. 24: График функције $y = \sin x$



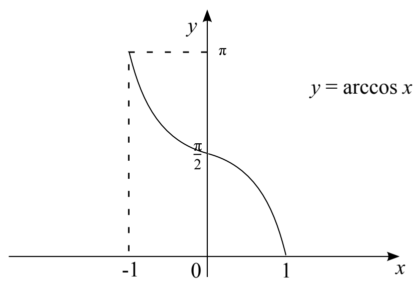
Сл. 25: График функције $y = \arcsin x$

Вредности инверзних тригонометријских функција за неке вредности аргумената

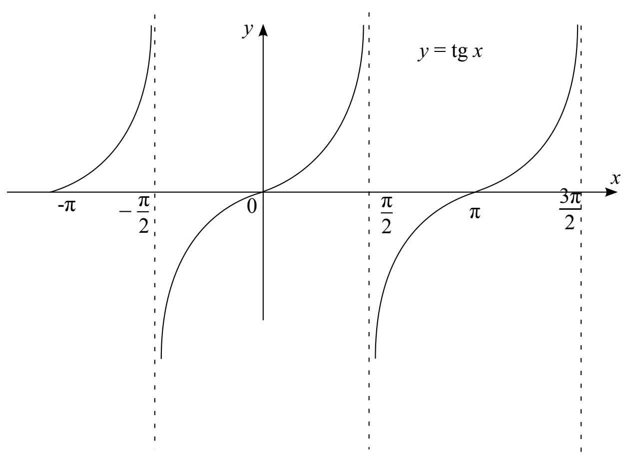
$f(x) \setminus x$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0



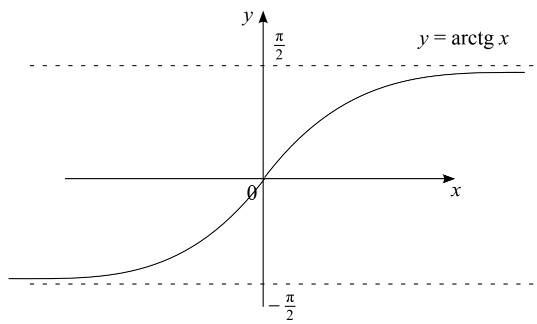
Сл. 26: График функције $y = \cos x$



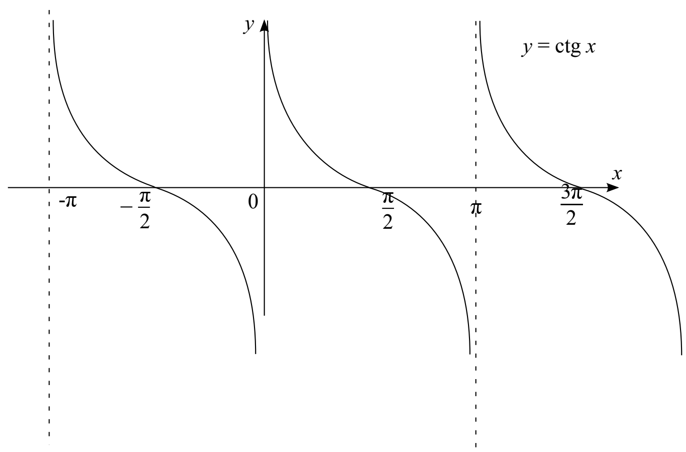
Сл. 27: График функције $y = \arccos x$



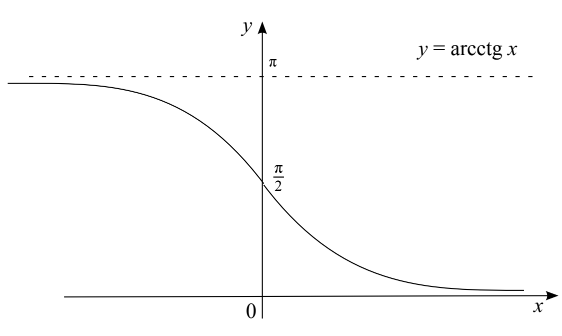
Сл. 28: График функције $y = \operatorname{tg} x$



Сл. 29: График функције $y = \operatorname{arctg} x$



Сл. 30: График функције $y = \operatorname{ctg} x$



Сл. 31: График функције $y = \operatorname{arcctg} x$

$f(x) \setminus x$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

10.2 Тригонометријске једначине и неједначине

Основне тригонометријске једначине

1. Решења једначине $\sin x = a$ где је $|a| \leq 1$ су $x = \arcsin a + 2k\pi$ или $x = \pi - \arcsin a + 2k\pi$ за $k \in \mathbb{Z}$.

2. Решења једначине $\cos x = a$ где је $|a| \leq 1$ су $x = \arccos a + 2k\pi$ или $x = -\arccos a + 2k\pi$ за $k \in \mathbb{Z}$.

3. Решења једначине $\operatorname{tg} x = a$ где је a произвољни реални број су $x = \operatorname{arctg} a + k\pi$ за $k \in \mathbb{Z}$.

4. Решења једначине $\operatorname{ctg} x = a$ где је a произвољни реални број су $x = \operatorname{arcctg} a + k\pi$ за $k \in \mathbb{Z}$.

5. Решавање једначина а) $\sin ax \pm \sin bx = 0$, б) $\cos ax \pm \cos bx = 0$, в) $\operatorname{tg} ax \pm \operatorname{tg} bx = 0$, г) $\operatorname{ctg} ax \pm \operatorname{ctg} bx = 0$, сводимо трансформацијом збира тј. разлике тригонометријских функција у производ па се решавање своди на решавање претходно поменутих једначина.

6. Решавање једначине $a \sin x + b \cos x = 0$, $a, b \neq 0$, ако је $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, дељењем са $\cos x$, се своди на решавање једначине типа 3.

7. Решавање једначине $a \sin x + b \cos x = c$, $a, b, c \neq 0$, $|c| < \sqrt{a^2 + b^2}$, дељењем са $\sqrt{a^2 + b^2}$ и трансформацијом на синус збира, се своди на једначину типа 1.

8. $\sin(ax + b) = \sin(cx + d)$.

Решење: Из полазне једначине добијамо $ax + b = cx + d + 2k\pi$ одакле следи да је $x = \frac{d-b}{a-c} + \frac{2k\pi}{a-c,} k \in \mathbb{Z}$ или $ax + b = \pi - (cx + d) + 2m\pi$. Из претходног следи $x = \frac{d+b}{a+c} + \frac{(2m+1)\pi}{a+c,}$, $m \in \mathbb{Z}$.

9. Решавање једначине $a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$, $a \neq 0$, се сменом $\sin x = t$ своди на решавање квадратне једначине.

Основне тригонометријске неједначине

1. $(\sin x > a, -1 \leq a \leq 1)$ акко $\arcsin a + 2k\pi < x < \pi - \arcsin a + 2k\pi, .$ $k \in \mathbb{Z}$.
2. $(\sin x < a, -1 \leq a \leq 1)$ акко $\pi - \arcsin a < x < 2\pi - \arcsin a + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
3. $(\cos x > a, -1 \leq a \leq 1)$ акко $-\arccos a + 2k\pi < x < \arccos a + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
4. $(\cos x > a, -1 \leq a \leq 1)$ акко $\arccos a + 2k\pi < x < 2\pi - \arccos a + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
5. $(\operatorname{tg} x > a,\ a \in \mathbb{R})$ акко $\operatorname{arctg} a + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
6. $(\operatorname{tg} x < a,\ a \in \mathbb{R})$ акко $\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \operatorname{arctg} a + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
7. $(\operatorname{ctg} x > a,\ a \in \mathbb{R})$ акко $k\pi < x < \operatorname{arcctg} a + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
8. $(\operatorname{ctg} x < a,\ a \in \mathbb{R})$ акко $\operatorname{arcctg} a + k\pi < x < \pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Решени задаци

1. Израчунати вредности тригонометријских функција:
   а) $\sin 315°$,
   б) $\cos 1640°$,
   в) $\sin(-1320°)$.

Решење:
а) $\sin 315° = \sin(360° - 45°) = -\sin(45°) = -\frac{-\sqrt{2}}{2}$,
б) $\cos 1640° = \cos(4 \cdot 360° + 200°) = \cos(180° + 20°) = -\cos 20°$,
в) $\sin(-1320°) = -\sin 1320° = -\sin(3 \cdot 360° + 240°) = -\sin 240° =$
$= -\sin(270° - 30°) = -(-\cos 30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Доказати идентитете:
   а) $\frac{1+\operatorname{ctg} 2x \cdot \operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x$,
   б) $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} - \frac{1+2\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha(\operatorname{tg}^2\alpha - 1)} = \frac{2}{1+\operatorname{tg}\alpha}$,

в) $\frac{\sin^4\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^4\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha-1}=\cos 2\alpha$,
г) $\frac{\cos\alpha-\sin\alpha-\cos 3\alpha+\sin 3\alpha}{2(\sin 2\alpha+2\cos^2\alpha-1)}=\sin\alpha$,
д) $\frac{8\cos^3 x-2\sin^3 x+\cos x}{2\cos x-\sin^3 x}=-\frac{3}{2}$ ако је $\operatorname{tg} x=2$.

Решење:
а) Представимо $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ у облику разломака и средимо добијени израз

$$\begin{aligned}\frac{1+\operatorname{ctg}2x\cdot\operatorname{ctg}x}{\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x} &= \frac{1+\frac{\cos 2x}{\sin 2x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}}=\frac{\frac{\sin x\sin 2x+\cos 2x\cos x}{\sin 2x\sin x}}{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}}=\frac{\frac{\cos(2x-x)}{\sin 2x\sin x}}{\frac{1}{\sin x\cos x}}=\\ &= \frac{\cos^2 x\sin x}{\sin 2x\sin x}=\frac{\cos^2 x}{2\sin x\cos x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}x,\end{aligned}$$

б) Представимо $\operatorname{tg} x$ у облику разломка и средимо добијени израз

$$\begin{aligned}&\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\frac{1+2\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\,(\operatorname{tg}^2\alpha-1)}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\frac{1+2\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-1\right)}=\\ &=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\frac{1+2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}-\frac{1+2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\\ &=\frac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-1-2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\\ &=\frac{2\cos\alpha(\sin\alpha-\cos\alpha)}{(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha)}=\frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{2}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+1}=\frac{2}{\operatorname{tg}\alpha+1},\end{aligned}$$

в) Користећи разлику квадрата и даљим сређивањем добијамо једнакости:

$$\begin{aligned}&\frac{\sin^4\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^4\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha-1}=\frac{\left(\sin^2\alpha\right)^2-\left(\cos^2\alpha\right)^2+\sin 2\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha-1}=\\ &=\frac{\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\cdot\left(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\right)+\sin 2\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha-1}=\frac{\left(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\right)+\sin 2\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha-1}=\\ &=\frac{-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha-1}=\frac{\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}{\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}-1}=\frac{\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}{\frac{\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha}}=\cos 2\alpha,\end{aligned}$$

г) Користећи формулу за ралику синуса и формулу за ралику косинуса добијамо једнакости:

$$\frac{\cos\alpha-\sin\alpha-\cos 3\alpha+\sin 3\alpha}{2\left(\sin 2\alpha+2\cos^2\alpha-1\right)}=\frac{(\cos\alpha-\cos 3\alpha)+(\sin 3\alpha-\sin\alpha)}{2\left(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha\right)}=$$
$$=\frac{2\sin 2\alpha\sin\alpha+2\cos 2\alpha\sin\alpha}{2\left(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha\right)}=\frac{2\sin\alpha(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)}{2\left(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha\right)}=\sin\alpha,$$

д) Ако је $\operatorname{tg} x=2$ тада је $\sin x=2\cos x$. Ако то уврстимо у полазну једнакост елиминсаћемо $\sin x$, тј.

$$\frac{8\cos^3 x-2\cdot 8\cos^3 x+\cos x}{2\cos x-8\cos^3 x}=\frac{\cos x-8\cos^3 x}{2(\cos x-4\cos^3 x)}=\frac{\cos x(1-8\cos^2 x)}{2\cos x(1-4\cos^2 x)}=$$
$$=\frac{1-8\cos^2 x}{2(1-4\cos^2 x)}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x-8\cos^2 x}{2\sin^2 x+2\cos^2 x-8\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x-7\cos^2 x}{2\sin^2 x-6\cos^2 x}.$$

Ако поделимо именилац и бројилац добијеног разломка са $\cos^2 x$ добићемо $\frac{\operatorname{tg}^2 x-7}{2\operatorname{tg}^2 x-6}=\frac{4-7}{8-6}=-\frac{3}{2}$.

3. Одредити вредност основних тригонометријских функција угла x, ако је $\operatorname{tg} x=\frac{3}{4}$, $\pi<x\le\frac{3\pi}{2}$.

Решење: Како је $\sin x=\pm\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$, то имамо $\sin x=\pm\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}}=\pm\frac{3}{5}$. Пошто је $\pi<x\le\frac{3\pi}{2}$, синус је негативан, па је $\sin x=-\frac{3}{5}$. Аналогно томе $\cos x=-\frac{4}{5}$, $\operatorname{ctg} x=\frac{4}{3}$.

4. Решити тригонометријске једначине:
а) $\cos x+\sin x=\sqrt{2}$,
б) $\sin x+\cos x=\sin x\cos x+1$,
в) $\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=\frac{3}{2}$,
г) $\frac{1}{\cos x}=\cos x+\sin x$,
д) $\cos 2x+\sin^2 x=\cos x$,
ђ) наћи решења једначине $\cos x\cos\frac{\pi}{5}+\sin x\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ која припадају $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{9\pi}{4}\right]$,
е) $\sin\frac{x}{2}+\cos x=1$.

Решење:
а) Израз са леве стране представља синус збира, тј. $\sin(x+\frac{\pi}{4})=1$. Увођењем смене $x+\frac{\pi}{4}=t$ добијамо једначину $\sin t=1$ која представља први тип тригонометријских једначина чије су решења

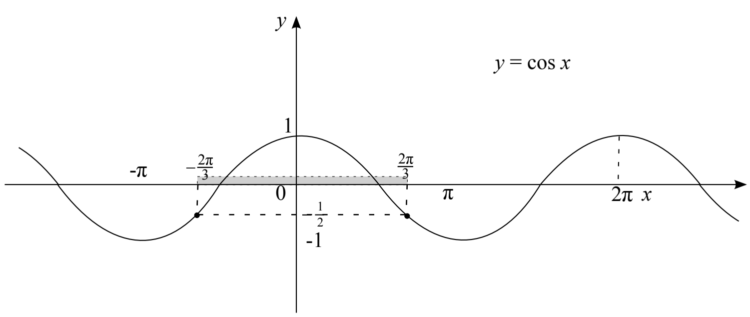
$$t = \arcsin 1 + 2k\pi \vee t = \pi - \arcsin 1 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Како је $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, одатле добијамо решење $t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee t = \pi - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Пошто је $\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ добијамо само једно решење $t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Враћањем смене добијамо $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, тј. $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;
б) Полазна једначина је еквивалентна једначини $\sin x - \sin x \cos x + \cos x - 1 = 0$ тј. $\sin x(1 - \cos x) - (1 - \cos x) = 0$. Факторисањем последње једначине добијамо $(\sin x - 1)(1 - \cos x) = 0$ одакле добијамо да је $\sin x - 1 = 0$ или $1 - \cos x = 0$ тј. $\sin x = 1 \vee \cos x = 1$ што даје решења $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;
в) Користећи формуле за свођење квадрата на косинус двоструког угла добијамо еквивалентну једначину $\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} = \frac{3}{2}$ тј. $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x) = \frac{3}{2}$. Из последње једначине добијамо да је $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0$. Након примене формуле за факторисање збира косинуса добијамо да важи да је $2\cos\frac{6x+2x}{2}\cos\frac{6x-2x}{2} + \cos 4x = 0$ тј. $2\cos 4x \cos 2x + \cos 4x = 0$. Последња једначина је еквивалентна $\cos 4x(2\cos 2x + 1) = 0$. Одавде је $\cos 4x = 0$ или $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, тј. $4x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ или $2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ако је $k \in \mathbb{Z}$. Сређивањем добијамо да је $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$ или $x = \frac{\pi}{3} + l\pi$ или $x = \frac{\pi}{3} + m\pi$, $k, l, m \in \mathbb{Z}$;
г) Ако је $\cos x \neq 0$ тада је једначина $\frac{1}{\cos x} = \cos x + \sin x$ еквивалентна једначини $1 - \cos^2 x - \sin x \cos x = 0$ тј. $\sin^2 x - \sin x \cos x = 0$. При чему смемо да делимо једначину са $\sin x$ само ако је $\sin x \neq 0$. Зато је лакше леву страну једначине записати као $\sin x(\sin x - \cos x) = 0$ што је еквивалентно $(\sin x = 0 \vee \sin x = \cos x)$ па су одатле решења $x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + l\pi,\ k, l \in \mathbb{Z}$;
д) Користећи формулу за косинус двоструког угла добијамо еквивалентну једначину $\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x = \cos x$ тј. $\cos^2 x - \cos x = 0$. Факторисањем добијамо да је $\cos x(\cos x - 1) = 0$ тј. $(\cos x = 0 \vee \cos x = 1)$ а одатле да су решења $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z}$;
ђ) Лева страна једнакости представља косинус разлике па је полазна једначина еквивалентна $\cos(x - \frac{\pi}{5}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Одатле је $x - \frac{\pi}{5} = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ тј. $x = \frac{\pi}{5} \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ што значи да су решења облика $(x = \frac{\pi}{30} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{11\pi}{30} + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z})$. Решења која припадају датом интервалу су $\frac{\pi}{30}$, $\frac{61\pi}{30}$ и $\frac{11\pi}{30}$.
е) Представљањем косинуса преко синуса половине угла добијамо еквивалентну једначину $\sin\frac{x}{2} + \left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right) = 1$ тј. $\sin\frac{x}{2} - 2\sin^2\frac{x}{2} = 0$. Факторисањем последње једначине добијамо $\sin\frac{x}{2}\left(1 - 2\sin\frac{x}{2}\right) = 0$ па је $\sin\frac{x}{2} = 0$ или $\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$. Решења прве једначине су $\frac{x}{2} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ што је

еквивалентно$x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, а друге једначине
$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + 2l\pi$, $l \in \mathbb{Z} \vee \frac{x}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$ тј.
$x = \frac{\pi}{3} + 4l\pi$, $l \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{5\pi}{3} + 4m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$.

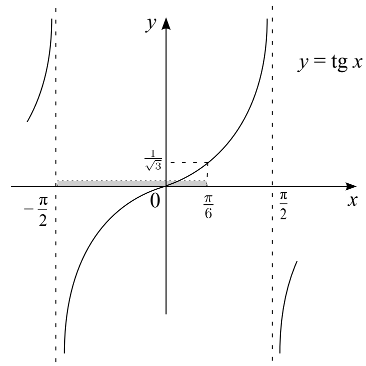
5. Решити тригонометријски неједначине:
   а) $2\cos x + 1 \geq 0$,
   б) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, x < 1$,
   в) $\sin x \geq \sin \frac{\pi}{7}$,
   г) $\sin x < \cos x$.

Решење:
а) Полазна неједначина је еквивалентна неједначини $\cos x \geq -\frac{1}{2}$. Да би смо решили неједначину прво морамо да решимо одговарајућу једначину $\cos x = -\frac{1}{2}$. Решења једначине су $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. За одређивање решења неједначине је напогодније посматрати график функције $\cos x$ на основном интервалу $[-\pi, \pi]$, па одатле видимо (сл. 32) да је решење неједначине $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\, k \in \mathbb{Z}$.



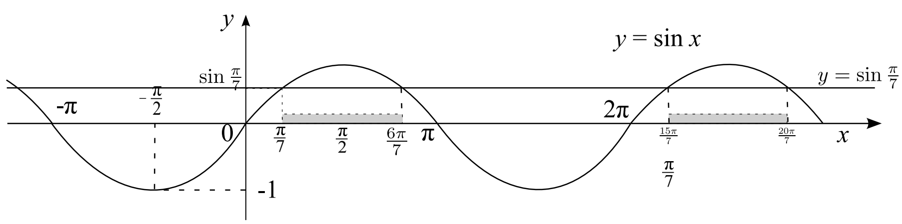
Сл. 32: График функције $y = \cos x$.

б) Полазна неједначина је еквивалентна неједначини $\mathrm{tg}\, x < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Да би решили неједначину прво морамо да решимо одговарајућу једначину $\mathrm{tg}\, x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Решења једначине су $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. За одређивање решења неједначине је напогодније посматрати график функције $\mathrm{tg}\, x$ на основном интервалу $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, па одатле видимо (сл. 33) да је решење неједначине $-\frac{\pi}{2} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi\, k \in \mathbb{Z}$,



Сл. 33: График функције $y = \operatorname{tg} x$.

в) За одређивање решења неједначине је напогодније посматрати график функције $\sin x$ на основном интервалу $[0, 2\pi]$, па одатле видимо (сл. 34) да је решење неједначине $\frac{\pi}{7} + 2k\pi \leq x \leq \frac{6\pi}{7} + 2k\pi\ k \in \mathbb{Z}$.

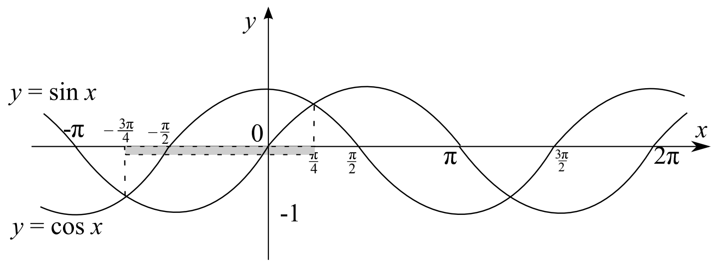


Сл. 34: График функције $y = \sin x$.

г) Прво треба пронаћи пресечне тачке кривих $y = \sin x$ и $y = \cos x$ на интервалу $[-\pi, \pi]$. Пресечне тачке добијамо решавањем једначине $\sin x = \cos x$. Решења једначине на датом интервалу су $x = -\frac{3\pi}{4}$ и $x = \frac{\pi}{4}$. Посматрајући график (сл. 35) добијамо да је решење неједначине $-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Задаци за вежбу:

1. Израчунати:
   а) $\sin 315°$.
   Резулатат: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Сл. 35: Графици функција $y = \sin x$ и $y = \cos x$.

б) $\cos 315°$.
Резулатат: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
в) $\sin 75° + \sin 15°$.
Резулатат: $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

2. Доказати
а) $\frac{2\cdot\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} = \sin 2\alpha$,
б) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$,
в) $\frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

3. Израчунати:
а) $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$, ако је $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; $\sin\beta = -\frac{7}{25}$; $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; $\pi < \beta < \frac{3}{2}\pi$.
Резулатат: $-\frac{56}{125}$.
б) $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ ако је $\cos\alpha = \frac{119}{169}$.
Резулатат: $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{5}{13}, \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{12}{13}, \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{12}$.

4. Решити једначине:
а) $\sin 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Резулатат: $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
б) $\sin 5x = \sin 3x + \sin x$.
Резулатат: $x = k\pi \vee x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$.
в) $\operatorname{tg} 4x = \operatorname{ctg} 6x$.
Резулатат: $x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{20},\ k \in \mathbb{Z}$.
г) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.
Резулатат: $x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{12} + 2l\pi,\ k, l \in \mathbb{Z}$.

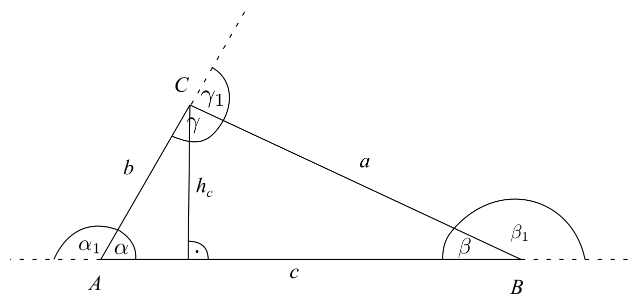
5. Решити неједначине:
а) $\sin x \leq \cos 3x$.

Резулатат: $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{8} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ или $\frac{5\pi}{8} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ или $\frac{9\pi}{8} + 2k\pi \leq x \leq \frac{13\pi}{8} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
б) $\operatorname{ctg} x \geq \operatorname{ctg} \frac{\pi}{11}$.
Резулатат: $k\pi < x \leq \frac{\pi}{11} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
в) $2\sin^2 x - \sin x - 1 \leq 0$.
Резулатат: $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

11 Планиметрија

11.1 Троугао

Троугао и основни елементи троугла су приказани на слици 36.



Сл. 36: Троугао

Уобичајене ознаке елемената троугла:

a, b, c - дужина страница,

α, β, γ - унутрашњи углови,

α_1, β_1, γ_1 - спољашњи углови,

h_a, h_b, h_c - висине,

s - полуобим,

r - полупречник уписаног круга,

R - полупречник описаног круга.

Обим и површина троугла рачунају се формулама:

$O = a + b + c = 2s$,

$P = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$,

$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,

$P = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R} = r \cdot s$,

$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha.$

За једнакостранични троугао ($a = b = c$) важи:

$O = 3a,$

$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2},$

$r = \frac{a\sqrt{3}}{6},$

$R = 2r = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$

Ако је троугао правоугли (c хипотенуза, a и b су катете, види слику 37) тада је

$c^2 = a^2 + b^2$ (Питагорина теорема),

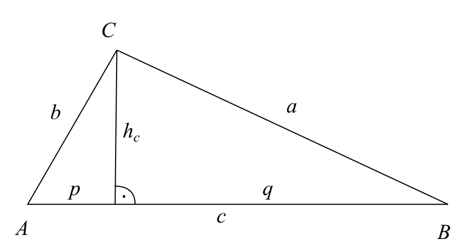
$P = \frac{ab}{2},$

$R = \frac{c}{2},$

$a^2 = c \cdot p,$

$h_c^2 = p \cdot q,$

$b^2 = c \cdot q.$



Сл. 37: Правоугли троугао $\triangle ABC$.

Ако су a, b и c наспрамне странице углога α, β и γ проиизвољног троугла ABC, а R полупречник описаног круга око тог троугла, онда важи:

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$ (синусна теорема),

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$

где последње три једнакости представљају косинусну теорему.

Четири значајне тачке троугла

У троуглу у једној тачки се секу

симетрале страница и ту тачку називамо центром описане кружнице,

симетрале углова и ту тачку називамо центром уписане кружнице,

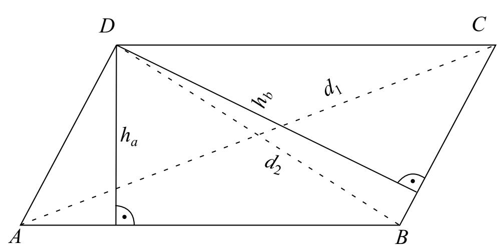
висине и ту тачку називамо ортоцентром,

тежишне дужи и ту тачку називамо тежиштем. Тежишне дужи спајају темена троугла са средиштима наспрамних страница. Тежиште дели тежишне дужи на два дела и део до странице је једнак трећини тежишне дужи.

Само у случају једнакостраничног троугла ове четри тачке се поклапају.

11.2 Четвороугао

Паралелограм

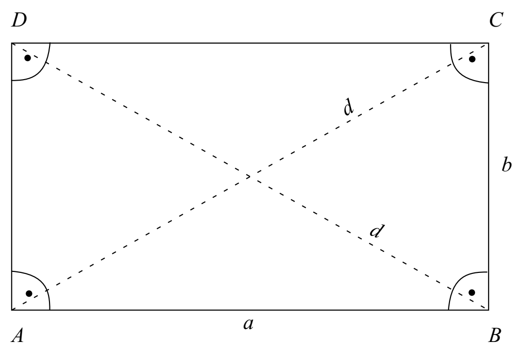


Сл. 38: Паралелограм.

Паралелограм је четвороугао (сл. 38) чије су наспрамне странице паралелне. Наспрамни углови су им једнки и дијагонале се међусобно полове. Површина је једнака $P = a \cdot h_a = b \cdot h_b$ где је h_a висина над страницом a и h_b висина над страницом b

Правоугаоник

Правоугаоник је паралелограм чији су унутрашњи углови једнаки правом углу (сл. 39). Површина је једнака $P = a \cdot b$. Обим је $O = 2a + 2b$.



Сл. 39: Правоугаоник.

Квадрат

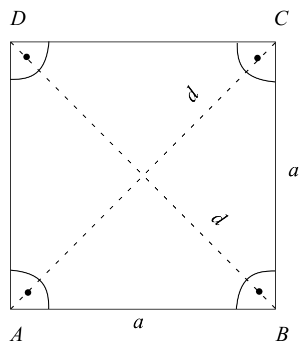
Квадрат је правоугаоник са једнаким страницама (сл. 40). За квадрат важи да је површина $P = a^2$, тј. $P = \frac{d^2}{2}$. Обим је $O = 4a$.

Ромб

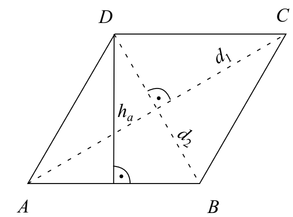
Ромб је паралелограм чије су све странице једнаке (сл. 41). Дијагонале се међусобно полове под правим углом. $P = ah$. $P = \frac{d_1 d_2}{2}$.

Трапез

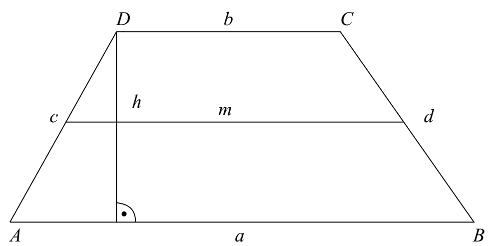
Трапез је четвороугао са једним паром паралелних страница (сл. 42) m средња линија - дуж која спаја средишта кракова при чему важи:



Сл. 40: Квадрат.



Сл. 41: Ромб.



Сл. 42: Трапез.

$m = \frac{a+b}{2}$,

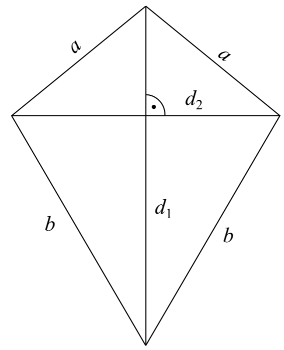
$P = \frac{a+b}{2} \cdot h = m \cdot h.$

Делтоид

Делтоид је четвороугао чија су два пара суседних страница једнаки, дијагонале d_1 и d_2 су међусобно нормалне (сл. 43). Површина делтоида је једнака $P = \frac{d_1 d_2}{2}$.

Тангентни четвороугао

Тангентни четвороугао је четвороугао у који се може уписати круг (сл. 44). Четвороугао је тангентни ако и само ако су збирови наспрамних страница једнаки тј. $a + c = b + d$.
Квадрат и ромб су такође тангентни четвороуглови.



Сл. 43: Делтоид.

Тетивни четвороугао

Тетивни четвороугао је четвороугао око кога се може описати круг (сл. 45). Четвороугао је тетиван ако и само ако су збирови наспрамнх углова једнаки тј. $\alpha + \gamma = 180°$ и $\beta + \delta = 180°$.

11.3 Многоугао

За многоугао важи да је:

број дијагонала n-тоугла $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$;

збир унутрашњих углова у n-тоуглу $S_n = (n-2) \cdot 180°$;

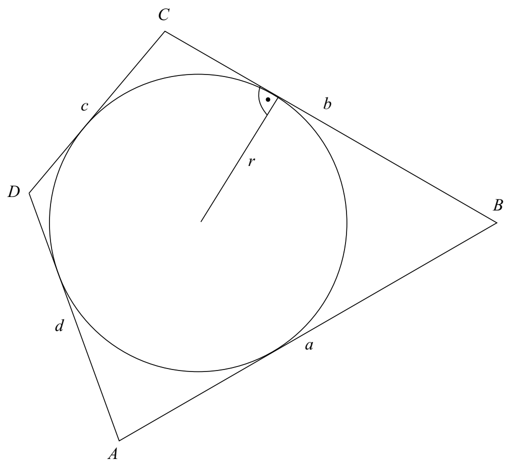
збир спољашњих углова у конвексном n-тоуглу је $360°$;

правилни многоугао је правилан ако су му све странице и сви унутрашњи углови једнаки;

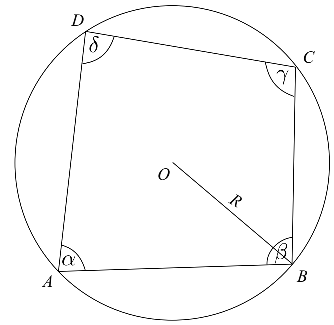
сваки правилни многоугао је тангентан и тетиван. Центар описаног и уписаног круга се поклапају;

обим и површина се израчунавају по формулама:
$O = n \cdot a$,
$P = n \cdot \frac{a \cdot r}{2}$;

где је a дужина странице правилног n-тоугла, а r полупречник уписаног круга.



Сл. 44: Тангентни четвороугао.



Сл. 45: Тетивни четвороугао.

11.4 Круг и делови круга

Важне формуле за израчунавање карактеристика круга и његових делова:

Обим круга $O = 2r\pi$.

Дужина кружног лука $l = \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha^{\circ}}{180^{\circ}}$, $l = r \cdot \varphi$ (φ је мера централног угла дата у радијанима)

Површина круга $P = r^2\pi$.

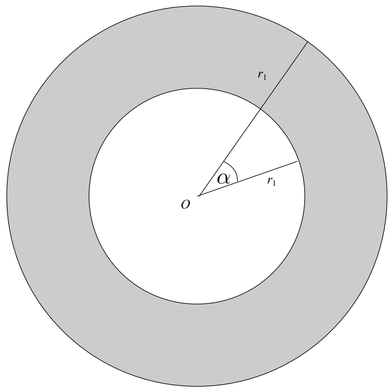
Површина кружног исечка $P = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \varphi}{360^{\circ}} = \frac{1}{2} \cdot l \cdot r = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \varphi$.

Површина кружног одсечка $P = \frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi\varphi}{180^{\circ}} - \sin\varphi\right) = \frac{1}{2}r^2\left(\varphi - \sin\varphi\right)$.

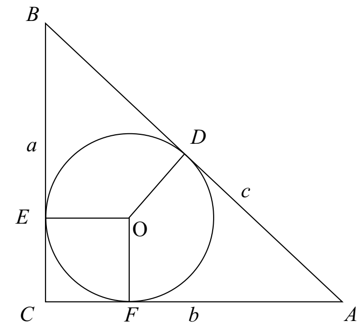
Површина кружног прстена (сл. 46) одређеног круговима полупречника r_1 и r_2 ($r_1 > r_2$) једнака је $P = (r_1^2 - r_2^2)\pi$.

Решени задаци

1. Обим правоуглог троугла је 132, а сума квадрата његових страница је 6050. Одредити странице троугла.



Сл. 46: Прстен.



Сл. 47:

Решење: Знамо да је $O = a + b + c = 132$, и $a^2 + b^2 + c^2 = 6050$. Како је троугао правоугли, према Питагориној теореми $c^2 = a^2 + b^2$ па уврштавањем у другу једначину добијамо $2c^2 = 6050 \Rightarrow c = 55$. На основу тога добијамо систем

$$\begin{cases} a + b + 55 = 132 \\ a^2 + b^2 + 3025 = 6050 \end{cases}$$

Решавањем овог система добијамо да су странице $a = 44$, $b = 33$ и $c = 55$.

2. У правоуглом троуглу тачка додира уписане кружнице дели хипотенузу на одсечке дужине 5 и 12cm. Одредити катете тог троугла.

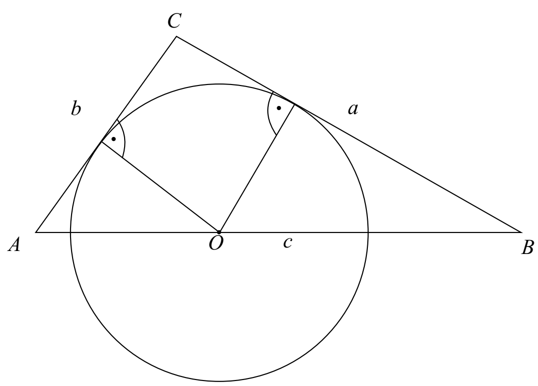
Решење: Са слике 47 видимо да важи да је је $d(B, D) = D(B, E) = 5$ и $d(A, D) = d(A, F) = 12$. Ако је $d(O, d) = d(O, E) = d(O, F) = r$, тада је

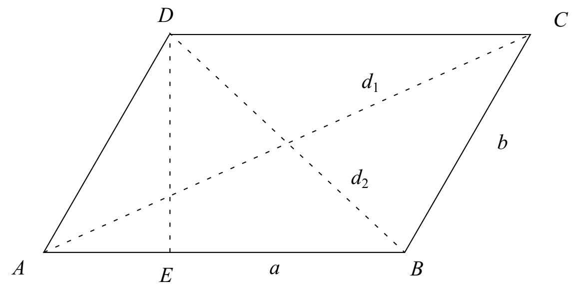
$$\begin{cases} b = r + 12, \\ a = r + 5, \\ c = 17. \end{cases}$$

Према Питагориној теореми $(r + 5)^2 + (r + 12)^2 = 17^2$ и одавде добијамо $r = 3$ па је $a = 8$ и $b = 15$.

3. Дате су странице троугла $a = 13$, $b = 14$ и $c = 16$. a и b су тангенте круга чији је центар на страници c. Одредити полупречник круга.

Решење: С обзиром да су све три странице познате површину можемо израчунати помоћу Хероновог обрасца $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $s = \frac{a+b+c}{2}$. Одатле следи да је $P = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-16)} = 84$.





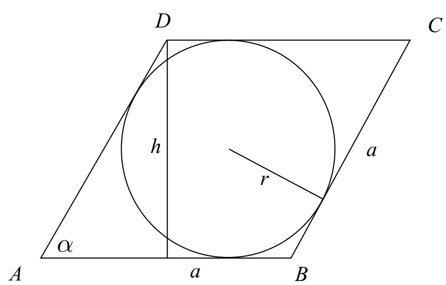
Сл. 48:

Сл. 49:

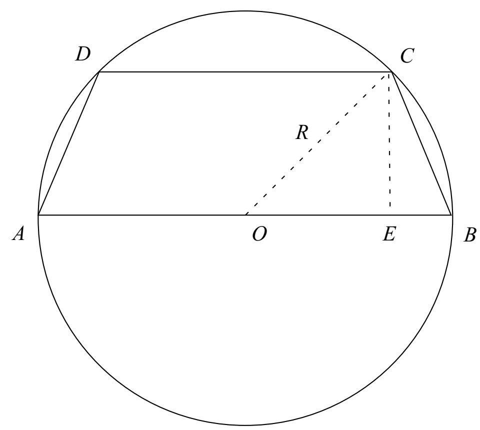
О је центар уписаног полукруга (сл. 48). $P_{ABC} = P_{AOC} + P_{BOC}$ односно $P_{ABC} = \frac{br}{2} + \frac{ar}{2}$, одакле је $\frac{r}{2}(13+14) = 84$ па је $r = \frac{56}{9}$.

4. У паралелограму задат је оштри угао 60°. Одредити однос између дужина страница ако се квадрати дужине дијагонала тог паралелограма односе као 19:7.

Решење: Из слике 49 видимо да важи да је $d(A,B) = a$, $d(A,C) = b$, $d(B,D) = d_2, d(B,C) = d_1, \angle BAD = 60°$. Из косинусне теореме добијамо да је $d_1^2 + d_2^2 = 2\,(a^2+b^2)$. Из $d_1^2 : d :_2^2 = 19 : 7$ имамо $d_1^2 = \frac{19}{7}d_2^2$, тако да је $\frac{19}{7}d_2^2 + d_2^2 = \frac{26}{7}d_2^2 = 2(a^2+b^2)$, односно $a^2+b^2 = \frac{13}{17}d_2^2$.
На основу слике 49 произлази да је
$d(A,E) = b\cos 60° = \frac{1}{2}b$,
$d(E,B) = b\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}b$,
$d(E,B) = \sqrt{d_2^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2} = \sqrt{d_2^2 - \frac{3}{4}b^2}$,
$d(A,B) = a = d(A,E)+d(E,B) = \frac{1}{2}b+\sqrt{d_2^2 - \frac{3}{4}b^2} = \frac{1}{2}b+\sqrt{\frac{7}{13}\,(a^2+b^2) - \frac{3}{4}b^2}$
Одавде је $a - \frac{1}{2}b = \sqrt{\frac{7}{13}\,(a^2+b^2) - \frac{3}{4}b^2}$. Након квадрирања и сређивања добијамо $6a^2 - 13ab + 6b^2 = 0$, односно када поделимо са b^2 добијамо $6\frac{a^2}{b^2} - 13\frac{a}{b} + 6 = 0$. Након увођења смене $\frac{a}{b} = t$, добијамо једначину $6t^2 - 13t + 6 = 0$ чија су решења $t_1 = \frac{3}{2}$ и $t_2 = \frac{2}{3}$. Ова два односа дају исти паралелограм зато можемо рећи да се странице паралелограма односе као $3:2$.



Сл. 50:



Сл. 51:

5. Одредити угао између страница ромба ако је његова површина 8, а површина круга уписаног у тај ромб $P = \pi$.

Решење: Према слици 50 $\sin\alpha = \frac{h}{a} = \frac{25}{a}$. Површина ромба је једнака $P = a \cdot h = a \cdot a \sin\alpha = a^2 \frac{2r}{a} = 2ra = 8$. Површина уписаног круга је $r^2\pi$ па важи следећа једнакост $r^2\pi = \pi$ одакле следи да је $r = 1$. Из $2ra = 8$ добијамо $a = 4$. Дакле, $\sin\alpha = \frac{2r}{a} = \frac{1}{2}$ па је $\alpha = 30°$.

6. Одредити полупречник кружнице описане око једнакокраког трапеза чије су основе 21 и 9 и висина 8.

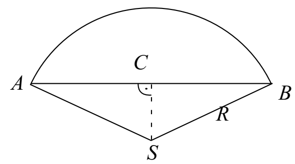
Решење: Са слике 51 видимо да је $d(A, B) = 21$, $d(C, D) = 9$, $d(E, C) = 8$ и

$$d(A, E) = d(D, C) + d(E, B) =$$
$$= d(D, C) + \frac{d(A,B) - d(D,C)}{2} = \frac{d(A,B) + d(D,C)}{2} = \frac{21+9}{2} = 15.$$
$$d(A, C) = \sqrt{(d(A, E))^2 + (d(E, C))^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17.$$
$$d(C, B) = \sqrt{(d(E, B))^2 + (d(E, C))^2} = \sqrt{8^2 + \left(\frac{21-9}{2}\right)^2} = 10.$$

Центар описане кружнице трапеза је центар уписане кружнице троугла ABC , а према формули

$$R = \frac{abc}{4P} = \frac{d(A,B) \cdot d(A,C) \cdot d(C,B)}{4 \cdot \frac{d(A,B) \cdot d(C,E)}{2}} = \frac{d(A,C) \cdot d(C,B)}{2d(C,E)} = \frac{17 \cdot 10}{2 \cdot 8} = \frac{85}{8}.$$

7. Израчунати површину кружног одсечка ако му је обим 10 а централни угао $\alpha = 120°$.



Сл. 52:

Решење: Са слике 52 се види да је обим одсечка $O = \frac{2R\pi}{3} + d(A,B)$ и $d(C,B) = R\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}R$, $d(A,B) = 2d(C,B) = \sqrt{3}R$, па важи да је $O = \frac{2\pi R}{3} + \sqrt{3}R = p$. Одавде је $R = \frac{3p}{2\pi+3\sqrt{3}}$. Површина кружног одсечка износи: $P = \frac{R^2\pi 120°}{360°} - \frac{d(A,B)\cdot d(C,S)}{2} = \frac{R^2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}R\cdot R\cdot\cos 60°}{2} = \frac{R^2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}R^2}{4}$. Након уврштавања добијамо $P_o = \left(\frac{3p}{2\pi+3\sqrt{3}}\right)^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3p^2(4\pi-3\sqrt{3})}{4(2\pi+3\sqrt{3})}$.

Задаци за вежбу

1. Центар уписане кружнице дели висину једнакокраког троугла, спуштену на основицу, на одсечке дужине 5 и 3, гледајући од темена. Одредити странце троугла.
   Резултат: $a = 12$, $b = 10$.

2. Странице троугла су 25, 24 и 7. Одредити полупречник уписане и описане кружнице тог троугла.
   Резултат: $r = 3$, $R = 12,5$.

3. Дужина двеју страница троугла су 6 и 3. Наћи дужину треће странице тог троугла ако је полусума висина спуштених на здате странице једнака трећој висини.
   Резултат: $c = 4$.

4. Израчунати површину трапеза чије су паралелне странице 16 и 44, а краци 17 и 25.
   Резултат: 450

5. Одредити полупречнике двеју кружница које се секу ако је растојање између њихових центара $\sqrt{3}+1$, с тим да се тетива која спаја заједничке тачке кружнице види из центра кружница под угловима

90° и 60°.
Резултат: $\sqrt{2}$, 2.

6. На круг полупречника R повучене су из једне тачке ван круга две тангенте на тај круг које затварају угао 2α. Одредити површину лика ограниченог тим тангентама и полупречницима круга који спајају центар с тачкама додира тангенти.
Резултат: $P = R^2 \operatorname{ctg} \alpha$.

7. Израчунати обим и површину једнакокраког трапеза описаног око круга ако је дужина веће основице 3cm, а један његов унутрашњи угао је 60°.
Резултат: $O = 8\text{cm}$, $P = 2\sqrt{3}\text{cm}^2$.

8. Око круга полупречника 2cm описан је једнакокраки трапез површине 20cm^2. Одредити дужине страница тог трапеза.
Резултат: $a = 8\text{cm}$, $b = 2\text{cm}$, $c = 5\text{cm}$.

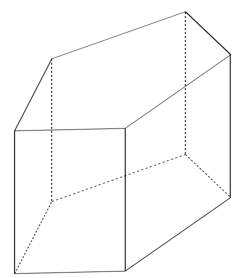
9. Израчунати површину паралелограма чији је обим 20cm, оштар угао 30°., а висине се односе као 2:3.
Резултат: $P = 12\text{cm}^2$.

10. Површина једнакокраког тангентног четвороугла је 156cm^2, а висина 12cm. Одредити дужине страница тог трапеза.
Резултат: $a = 18$ cm, $b = 8$ cm, $c = 13$ cm.

12 Стереометрија

12.1 Призма

Призма је полиедар (сл. 53) који има две стране које су подударни и паралелни n-тоуглови које зовемо базама (основама), и n страна који су паралелограми које називамо бочним странама. Права призма је призма код које су бочне стране нормалне на основу. Правилна призма је права призма чије су основе правилни многоуглови. Висина призме је нормално растојање између основа.



Сл. 53: Призма.

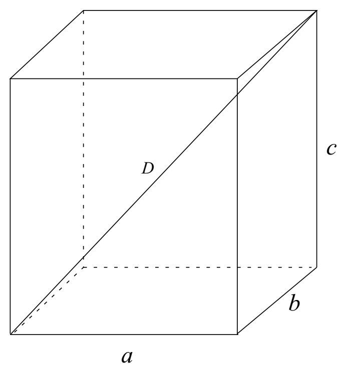
Површина и запремина призме се рачуна као $P = 2B + M$, тј. $V = B \cdot H$. Где је B- површина базе, M- површина омотача и H-висина призме.

Квадар

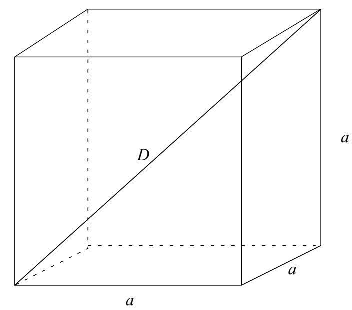
Ако су основе призме паралелограми онда се та призма зове паралелепипед. Квадар (сл. 54) је прави паралелепипед чије су основе правоугаоници. Површина и запремина квадра се рачуна као $P = 2 \cdot (ab + bc + ac)$, тј. $V = a \cdot b \cdot c$. Где су a, b, и c ивице квадра, а D дијагонала квадра.

Коцка

Коцка је квадар (сл. 55) чије су све ивице једнаке.
Површина и запремина призме се рачуна као $P = 6a^2$, тј. $V = a^3$.



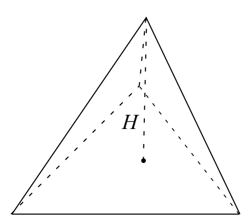
Сл. 54: Квадар.



Сл. 55: Коцка.

12.2 Пирамида

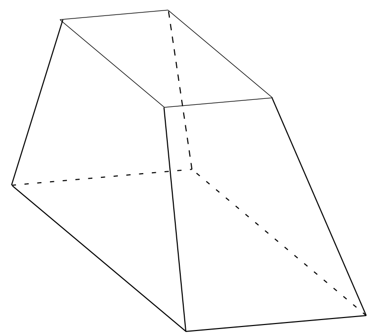
Пирамида је полиедар који се добија тако што се темена n-тоугла споје са једном тачком која се налази ван равни тог n-тоугла и коју називамо теменом или врхом пирамиде. Пирамида одатле има једну страну која је n-тоугао и коју називамо основом, и n бочних страна које су троуглови. Површина пирамиде се рачуна по формули $P = B + M$, а запремина по формули $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H$.
Ако се теме пирамиде налази изнад центра основе, тада ту пирамиду називамо правом. Ако је основа пирамиде правилан n-тоугао онда ту пирамиду називамо правилном. Тако правилна четворострана пирамида (сл. 56) има за основу квадрат.
Ако је тространа пирамида правилан тетраедар (сл. 56) онда су му све ивице дужине a. Тада се површна и запремина рачунају као $P = a^2\sqrt{3}$, тј. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.



Сл. 56: Пирамида.

12.3 Зарубљена пирамида

Зарубљена пирамида се добија тако што пирамиду пресечемо са равни која је паралелна основи и одбацимо део пирамиде где се налази врх (сл. 57). За добијену зарубљену пирамиду можемо рећи да има две основе и висина је растојање између њих. Бочне стране зарубљене пирамиде су трапези.



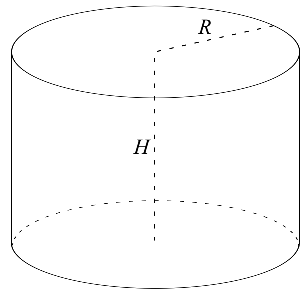
Сл. 57: Зарубљена пирамида.

Тада се површна и запремина зарубљене пирамиде рачунају као $P = B_1+B_2+M$, тј. $V = \frac{1}{3}\cdot H\cdot(B_1+\sqrt{B_1B_2}+B_2)$, где су B_1-површина доње основе, B_2-површина горње основе, M-површина омотача, $H-$висина.

12.4 Ваљак

Ваљак је геометријско тело које има две паралелне кружне основе (базе) које су спојене омотачем. Ако је дуж која спаја центре основа нормална на основе, онда ваљак називамо правим. У супротном, ваљак називамо искошеним. Прави ваљак можемо посматрати и као тело које настаје ротацијом правоугаоника око једне његове странице. (сл. 58). Страница око које ротира представља висину ваљка, а друга страница правоугаоника представља полупречник основе.

Површину и запремину ваљка рачунамо формулама $P = 2B + M$, тј. $V = B \cdot H = r^2 \cdot \pi \cdot H$, где су B- површина основе, M-површина омотача, r-полупречник основе и H- висина ваљка. Ако је ваљак прав онда је $P = 2 \cdot r^2\pi + 2r\pi \cdot H = 2r\pi(r + H)$.

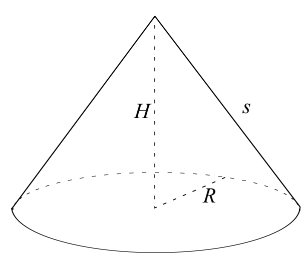


Сл. 58: Ваљак.

Прави ваљак је правилан ако је $2R = H$, тј. ако је његов осни пресек квадрат.

12.5 Купа

Омотач купе је геометријско тело које формирају дужи чији један крај представљају тачке кружнице а други крај је фиксирана тачка ван равни кружнице (сл. 59). Ту фиксирану тачку називамо врхом или теменом купе. Купа је тело ограничено омотачем и основом, где је основа круг којим је описан омотач. Ако се теме купе налази изнад центра основе онда купу називамо правом купом, а у супротном купу називамо искошеном (или косом). Растојање темена купе од равни у којој се налази основа називамо висином купе.



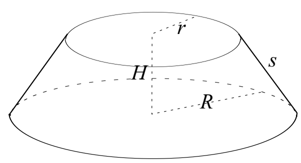
Сл. 59: Купа.

Површина купе се рачуна формулом $P = B + M$, а запремина формулом $V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}r^2\pi \cdot H$, где су B-површина основе, M-површина омотача, H- висина купе, r-полупречник основе.

Ако је купа права, онда је $P = r^2\pi + r\pi s = r\pi(r + s)$, где је s- дужина дужи (изводнице) која спаја теме и кружницу основе. Права купа је правилна ако је $2r = s$, тј. ако је њен осни пресек једнакостранични троугао.

12.6 Зарубљена купа

Ако купу пресечемо са равни која је паралелна равни основе и одбацимо део који садржи врх добијамо зарубљену купу (сл. 60). За зарубљену купу можемо рећи да има две паралелне основе и омотач. Висина зарубљене купе је растојање између равни у којима се налазе основе.



Сл. 60: Зарубљена купа.

Површина зарубљене купе се рачуна формулом, $P = B_1 + B_2 + M$, а запремина по формули $V = \frac{1}{3} \cdot H \cdot (B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2)$ односно $V = \frac{1}{3} \cdot H\pi \cdot (R^2 + r \cdot R + r^2)$ где су B_1- површина доње основе, B_2- површина горње основе, M- површина омотача, H-висина зарубљене купе, R-полупречник доње основе, r-полупренчник горње основе.

12.7 Лопта-сфера

Сферу чине тачке које су подједнако удаљене од фиксиране тачке коју зовемо центром. Удаљеност прозвољне тачке од центра је полупречник сфере.

Површина и запремина сфере се рачунају по формулама $P = 4r^2\pi$, тј. $V = \frac{4}{3} \cdot r^3\pi$.

Решени задаци:

1. Омотач праве квадратне призме је $7200\ \mathrm{cm}^2$, а запремина је $64800\ \mathrm{cm}^3$. Одредити страницу базе a и висину призме H.

Решење: Омотач праве правилне четворостране призме рачунамо по формули $P = 4 \cdot a \cdot h = 7200$. Запремина те призме је $a^2 \cdot h = 64800$. Решавањем овог система једначина добијамо $a = 36$ cm и $h = 50$ cm.

2. Дате су ивице $a_1 = 6$ cm и $a_2 = 8$ cm двеју коцака. Одредити запремину оне коцке чија је површина омотача једнака збиру површина омотача датих коцака.

Решење: Површина омотача коцака су $P_1 = 6a_1^2 = 6 \cdot 6^2 = 216$ cm^2 односно $P_2 = 6a_2^2 = 6 \cdot 8^2 = 384$ cm^2 Сада треба израчунати ивицу коцке чија је површина $P = 216 + 384 = 600$ cm^2. Користећи формулу видимо да је $600 = 6 \cdot a^2$ одакле следи да је $a = 10$ cm, па је запремина тражене коцке $V = 1000$ cm^3.

3. Основне ивице праве тростране призме су 10, 17, 21 а запремина је 224. Израчунати бочну ивицу.

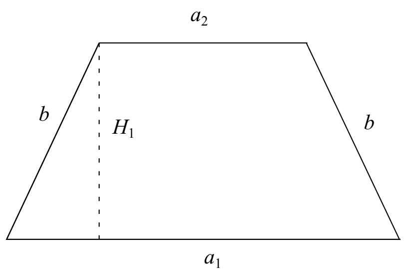
Решење: Запремина пирамиде једна је $V = \frac{1}{3}BH$ па је запремина једнака $224 = \frac{1}{3}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \cdot H$. Како је $s = \frac{a+b+c}{2} = 24$ одатле је $H = \frac{3 \cdot 224}{\sqrt{24 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 3}} = \frac{3 \cdot 224}{84} = 8$.
Да би смо одредили бочну ивицу пирамиде, морамо одредити полупречник описаног круга око основе, тј. $R = \frac{abc}{4P} = \frac{10 \cdot 17 \cdot 21}{4 \cdot 84} = \frac{85}{8}$. Сада имамо две катете правоуглог троугла, а хипотенуза представља бочну ивицу, тј. $h = \sqrt{R^2 + H^2} = \sqrt{\left(\frac{85}{8}\right)^2 + 8^2} = 13,3$.

4. Израчунати површину и запремину правилне четворостране зарубљене пирамиде код које су основне ивице $a_1 = 64$ cm и $a_2 = 48$ cm, а бочна ивица $b = 20$ cm.

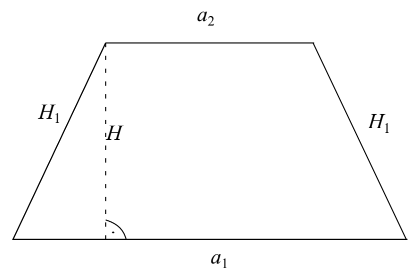
Решење: Из релације $P = a_1^2 + a_2^2 + 4\frac{a_1+a_2}{2}H_1$, где је H_1 висина бочне стране (сл. 61). Бочна страна је једнакокраки трапез па је његова висина $H_1 = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a_1-a_2}{2}\right)^2} = \sqrt{20^2 - \left(\frac{64}{2} - 48\right)^2} = \sqrt{400-64} = \sqrt{336}$.
Ако H_1 уврстимо у почетну релацију добијамо

$$P = 64^2 + 48^2 + 2 \cdot (64 + 48) \cdot \sqrt{336} = 10506.$$

Запремину правилне четворостране зарубљене пирамиде одређујемо по формули $V = \frac{H}{3}\left(a_1^2 + a_2^2 + a_1a_2\right)$ где је H висина пирамиде (сл. 62). Дакле, $H = \sqrt{H_1^2 - \left(\frac{a_1-a_2}{2}\right)^2} = \sqrt{336 - \left(\frac{64-48}{2}\right)^2} = \sqrt{272}$. Коначно добијамо $V = \frac{\sqrt{272}}{3} \cdot (64^2 + 48^2 + 64 \cdot 48) = 52072$.



Сл. 61:



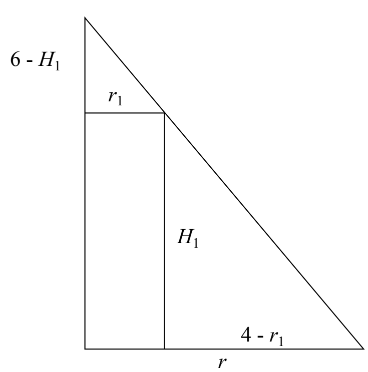
Сл. 62:

5. У праву кружну купу са полупречником основе $r = 4$ cm и висином $H = 6$ cm уписан је ваљак максималне запремине. Израчунати ту запемину.

Решење: Нека је H_1 висина ваљка уписаног у купу (сл. 63). На основу сличности троуглова следи да је $\frac{G-H_1}{r_1} = \frac{H_1}{4-r_1} \Rightarrow H_1 = \frac{24-6r_1}{4}$. Запремина ваљка је функција од r_1, тј. $V = f(r_1)$ и

$$V_v = B_1 H_1 = \pi r_1^2 H_1 = \pi r_1^2 (6 - \frac{3}{2} r_1) = \pi r_1^3 (-\frac{3}{2}) + 6\pi r_1^2.$$

Одатле $f'(r_1) = -\frac{9}{2} r_1^2 \pi + 12 r_1 \pi$ и $f'(r_1) = 0$ за $r_1 = 0$ или $r_1 = \frac{8}{3}$.
Следи да функција f има своју максималну вредност за $r_1 = \frac{8}{3}$, па је $V_{max} = \pi \frac{64}{9} \cdot 2 = \frac{128}{9} \pi$ cm^3.



Сл. 63:

6. Странице правоугаоник разликују се за 4. Његовом ротацијом око веће странице настаје ваљак чија је површина 192π. Колика је запремина тела које настаје када правоугаоник ротира око мање странице?

Решење: Ако је $a > b$ тада је $a - b = 4$. Површина ваљка који настаје ротацијом око веће странице је $P_a = 2b^2\pi + 2b\pi a = 192\pi$. Ако ову једначину поделимо са 2π добијамо $b^2 + ba = 96$.

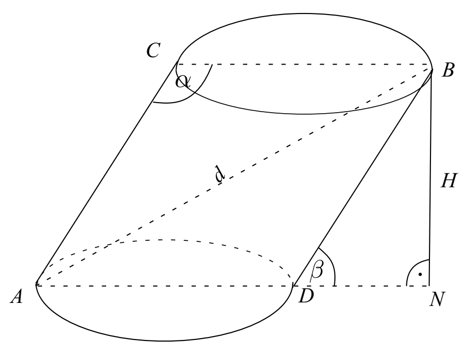
Решење система $\left\{ \begin{array}{c} a - b = 4 \\ b^2 + ab = 96 \end{array} \right.$ је $a = 10$ и $b = 6$.

Запремина ваљка који настаје ротацијом правоугаоника око мање странице износи:

$V = a^2\pi b$, па је $V = 10^2\pi 6 = 600\pi$.

7. Карактеристичан осни пресек косог ваљка је паралелограм чије су странице 12 и 17, а једна дијагонала 25 (12 је страница базе). Израчунати запремину тог ваљка.

‘



Сл. 64:

Решење: Са слике (сл. 64) видимо да запремина косог ваљка износи $V = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi H$. Из троугла $\triangle ABC$ имамо према косинусној теореми $d^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$. Одавде је

$$\cos\alpha = \frac{a^2+b^2-d^2}{2ab} = \frac{12^2+17^2-25^2}{2\cdot 12\cdot 17} = -\frac{8}{17} = \cos(180° - \beta) = -\cos\beta,$$

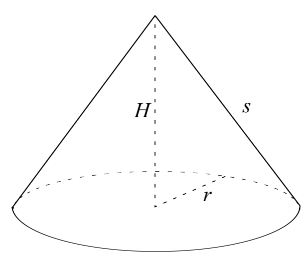
одакле добијамо да је $\cos\beta = \frac{8}{17}$. Из троугла $\triangle DNB$ следи

$$h = b\sin\beta = b\sqrt{1-\cos^2\beta} = 17\sqrt{1-\sqrt{\left(\frac{8}{17}\right)^2}} = 15,$$

па је тражена запремина ваљка $V = 36\pi \cdot 15 = 540\pi$.

8. Висина H и изводница s праве купе односе се као $3 : 5$, а њена запремина је 128π cm^3. Израчунати површину купе.

Решење: Како је $H : s = 3 : 5$, то је $H = \frac{3s}{5}$ (сл. 65), па је на основу Питагорине теореме $r^2 = s^2 - H^2$, односно $r^2 = s^2 - \frac{9s^2}{25}$, тј. $r^2 = s^2\frac{16}{25}$, а из формуле $V = \frac{1}{3}r^2\pi H$ добијамо $128\pi = \frac{1}{3}r^2\pi H$, односно $3 \cdot 128 = r^2 H$ одакле следи да је $3 \cdot 128 = s^2\frac{16}{25} \cdot \frac{3s}{5} = \frac{16s^3}{125}$ тј. $s^3 = 8 \cdot 125$ па је одатле $s = 10$ cm.



Сл. 65:

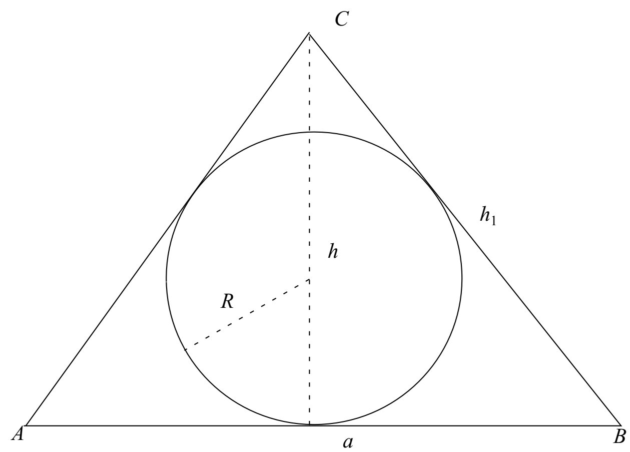
Лако одређујемо да је $H = 6$ cm и $r = 8$ cm, па је површину купе $P = B + M = \pi r(r + s) = \pi \cdot 8 \cdot 18 = 144\pi$ cm^2.

9. Површина омотача купе једнака је површини кружног исечка полупречника 8 и централног угла $135°$. Одредити површину и запремину те купе.

Решење: Површина омотача је $M = \frac{R^2\pi\alpha}{360°} = R\pi$. Уврштавањем податка добија се $8r = \frac{64 \cdot 135°}{360°} \Rightarrow r = 3$. Висина купе је
$H = \sqrt{R^2 - 5^2} = \sqrt{55}$
$P = 3\pi(3 + 8) = 33\pi$ и $V = \frac{9\pi}{3}\sqrt{55} = 3\sqrt{55}\pi$.

10. Ако се полупречник лопте повећа за 3 cm, њена запремина ће се увећати за 252 cm^3. Колико износи повећање површине?

Решење: Према релацији $\frac{4}{3}(R + 3)^3\pi - \frac{4}{3}R^3\pi = 252\pi$ важи да је $(R + 3)^3 - R^3 = 189$, односно $R^3 + 9R^2 + 27R + 27 - R^3 = 189$. Решење једначине је $R = 3$.
Површину лопте одређујемо по формули $P = 4R^2\pi$ тако да се површина промени за $P = 4(R + 3)^2\pi - 4R^2\pi = 4 \cdot 36\pi - 4 \cdot 9\pi = 108\pi$ cm^2.



Сл. 66:

11. У праву квадратну пирамиду чија је висина 2 cm, база квадрат странице 3 cm, уписана је лопта. Одредити запремину те лопте.

Решење: Осни пресек пирамиде који је полови страницу пирамиде је приказан на слици 66. Површина троугла $\triangle ABC$ је $P = \frac{ah}{2}$, односно $P = R \cdot s$, где је $s = \frac{a+2h_1}{2}$, тако да је $\frac{a \cdot h}{2} = R \cdot s$, $s = \frac{a+2h_1}{2}$, односно $\frac{ah}{2} = R\frac{a2h_1}{2} \Rightarrow ah = R(a+2h_1)$.

Висина бочне стране је $h_1 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2}$, па добијамо

$ah = R(a + 2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2}$

$a = 3$, $h = 2$ тако да је

$R = \frac{2 \cdot 3}{3+2\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+2^2}} = \frac{6}{3+2 \cdot \frac{5}{2}} = \frac{3}{4}$.

$V = \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3 \pi = \frac{9}{16}\pi$.

Задаци за вежбу:

1. Метална коцка чија је основна ивица 4 cm претопи се у квадар чије се странице односе као 1:2:4. За колико се променила површина тела?
   Резултат: 112 cm^2−96 cm^2= 16 cm^2.

2. База призме је правилни осмоугао. Њена запремина је 8 cm^3, а

њена висина . Одредити површину омотача.
Резултат: $M = 13,2\,m^2$.

3. База праве призме је ромб чије су дијагонале $d_1 = 12$, $d_2 = 16$. Колика је висина призме ако јој је површина једнака запремини?
Резултат: $H = \frac{24}{7}$.

4. Основа пирамиде је троугао са страницама $a = 12$ cm, $b = 16$ cm и $c = 20$ cm, а бочне ивице су једнаке и имају дужину 26 cm. Израчунати запремину пирамиде.
Резултат: $V = 768$ cm^3.

5. Израчунати запремину праве четворостране пирамиде ако је бочна ивица 9 cm, а висна за 1 cm мања од ивице базе.
Резултат: $V = \frac{448}{3}$ cm^3.

6. Површина омотача праве правилне тростране пирамиде и површине њене основе односе се као $\sqrt{3} : 1$. Одредити косинус угла под којим је страна пирамиде нагнута према основици.
Резултат: $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

7. Израчунати запремину правилне шестостране зарубљене пирамиде којој су основне ивице база $a_1 = 16$, $a_2 = 8$ и бочна ивица $b = 10$**.**
Резултат: $V = 1344\sqrt{3}$ cm^3.

8. Прави ваљак је задат обимом $O = 20\ cm$ и површином $P = 24$ cm^2 осног пресека. Израчунати запремину тог ваљка.
Резултат: $V_1 = 24\pi$ cm^3, $V_2 = 36\pi$ cm^3.

9. Површина праве купе је 96π cm^2, а дужина изводнице је 10 cm. Израчунати запремину купе.
Резултат: $V = 96\pi$ cm^3.

10. Изводница праве зарубљене купе је $s = 5$ cm, а полупречници основе $R = 5$ cm и $r = 2$ cm. У купу је уписана правилна зарубљена четворострана пирамида тако да је доња основа пирамиде уписана у доњу основу купе, а горња основа пирамиде у горњу основу купе. Израчунати запремину зарубљене пирамиде.
Резултат: $V = 104$ cm^3.

11. Израчунати запремину праве зарубљене купе ако се површине њених основа 25π cm^2 и 4π cm^2, а површина омотача .
Резултат: $V = 52\pi$ cm^3.

12. У металну шупљу лопту, чији је спољашњи пречник $2r = 18$ cm, а дебљина $d = 2$ cm, треба претопити у масивну лопту. Колики је њен полупречник?
Резултат: $r = \sqrt[3]{38,6}$.

13. Једнакостраничан троугао странице a, ротира око праве који је паралелан с висином, а удаљен је од најближег темена троугла за $\frac{a}{2}$. Одредити запремину и површину тог обртног тела.
Резултат: $V = \frac{a^3\pi}{2}\sqrt{3}$ cm^3, $P = 6a^2\pi$.

13 Аналитичка геометрија у равни

13.1 Растојање између две тачке

Ако су $A(x_1y_1)$ и $B(x_2,y_2)$ две тачке у равни, тада је

$$d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_2)^2+(y_2-y_1)^2}$$

растојање датих тачака.
Ако тачка $C(x,y)$ дели дуж у односу λ, тј. ако је $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\lambda$, тада је

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Ако је $\lambda=1$, тада релацијама $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $x=\frac{y_1+y_2}{2}$, одређујемо координате средишта дужи AB.
Ако су $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ и $C(x_3,y_3)$ три тачке равни које не припадају истој правој, тада површину троугла ABC рачунамо по формули

$$P=\frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|.$$

13.2 Једначине праве у равни

Једначина права се може задати на разне начине:

$Ax+By+C=0$ општи (имплицитни) облик једначине праве;

$y=kx+n$ експлицитни облик једначине праве, где k и n имају исто значење као код линеарне функције;

$y-y_1=k(x-x_1)$ једначина праве кроз тачку $M_1(x_1,y_1)$ чији је коефицијент правца k;

$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ једначина праве кроз две тачке $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, где је $x_1\neq x_2$. Ако је $x_1=x_2$;

$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$ је сегментни облик једначине праве, где су m и n одсечци које права одсеца на координатним осама $(m,n\neq 0)$.

Однос између две праве се може описати углом између њих односно њиховим коефицијентима праваца:

$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$ угао између двеју правих, где су k_1 и k_2 су коефицијенти правaца правих;

$k_1 = k_2$ услов паралелности;

$k_2 = -\frac{1}{k_1}$ услов нормалности $k_1 \neq 0$.

Растојање тачке $M(x_0, y_0)$ од праве $Ax + By + C = 0$ је дато формулом:

$d = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

13.3 Криве другог реда

Кружница

Једначина кружнице са центром у тачки $C(p, q)$ и полупречником r дата је са

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2.$$

Ако је центар координатни почетак $O(0, 0)$ тада је једначина кружнице дата са

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

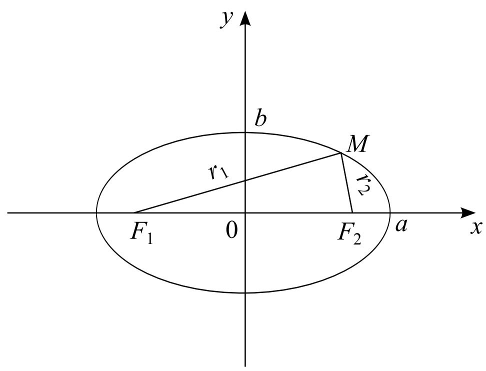
Услов да права $y = kx+n$ буде тангента кружнице $(x-p)^2+(y-q)^2 = r^2$ је:

$$r^2(1 + k^2) = (kp - q + n)^2.$$

Ако је центар кружнице у координатном почетку, тј. ако је једначина кружнице $x^2 + y^2 = r^2$, тада је услов да права $y = kx + n$ буде тангента кружнице $r^2(1 + k^2) = n^2$.
Ако је $M(x_0, y_0)$ тачка кружнице $(x-p)^2+(y-q)^2 = r^2$, тада је једначина тангенте кружнице у тој тачки

$$(x-p)(x_0-p) + (y-q)(y_0-q) = r^2,$$

која у случају кружнице $x^2 + y^2 = r^2$ постаје $xx_0 + yy_0 = r^2$.



Сл. 67:

Елипса

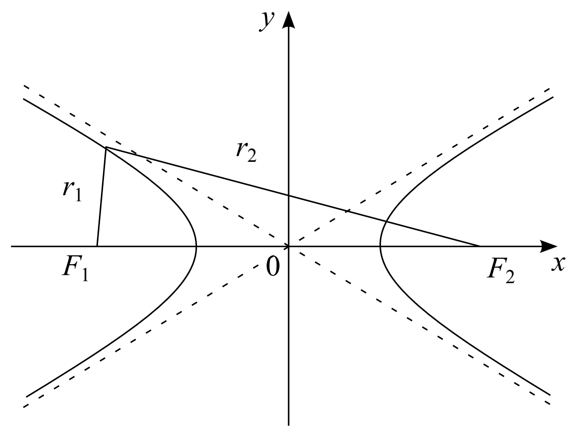
Елипса (сл. 67) је скуп тачака у равни којима је збир одстојања од до две фиксне тачке константан. Те фиксиране тачке F_1 и F_2 се називају жиже или фокуси елипсе.

Ако је тај збир одстојања $2a$ и ако су те жиже $F_1(-e, 0)$ и $F_2(+e, 0)$ где $0 < e < a$, тада је једначина елипсе $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ или $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, при чему је $b^2 = a^2 - e^2$, $r_1 + r_2 = 2a$ a и b су дужине велике односно мале полуосе елипсе.
Број $\epsilon = \frac{b}{a}$ зове се ексцентрицитет елипсе. Површина дела равни ограниченог елипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ је једнака $P = ab\pi$.
Услов да права $y = kx+n$ буде тангента елипсе $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ је $a^2k^2+b^2 = n^2$. Једначина тангенте елипсе у њеној тачки $M(x_0, y_0)$ је $b^2xx_0+a^2yy_0 = a^2b^2$ или $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

Хипербола

Хипербола (сл. 68) је скуп свих тачака у равни чија је апсолутна вредност разлике одстојања од две фиксне тачке константна и једнака је $2a$, тј. $|r_2 - r_2| = 2a$, дата је са $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где је a реална а b имагинарна полуоса.

Тачке $F_1(-e, 0)$ и $F_2(+e, 0)$, $(0 < e < a)$ су жиже (фокуси) хиперболе, при чему је $e^2 = a^2 + b^2$.



Сл. 68:

Праве $y = \pm\frac{b}{a}x$ су асимптоте хиперболе. $\epsilon = \frac{e}{a} > 1$ је ексцентрицитет хиперболе.

Услов да права $y = kx + n$ буде тангента на хиперболу је $n^2 = a^2k^2 - b^2$.

Једначина тангенте у тачки $M(x_0, y_0)$ хиперболе има облика $b^2xx_0 - a^2yy_0 = a^2b^2$ или $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

Парабола

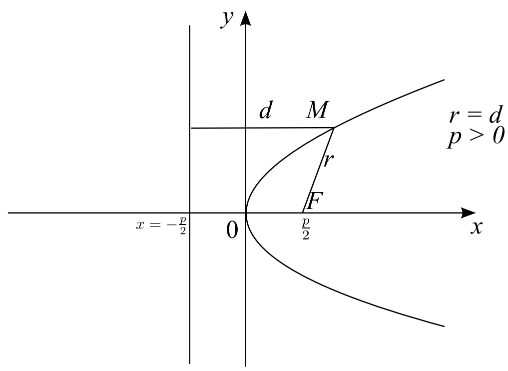
Парабола (сл. 69) је скуп тачака у равни које су подједнако удаљене од једне фиксиране тачке и фиксиране праве која не садржи ту тачку. Фиксирана тачка је жижа (фокус) параболе, а фиксирана права је директриса параболе.

Ако је жижа праболе у тачки $F(\frac{p}{2}, 0)$, а директриса права $x = -\frac{p}{2}$, тада је једначина параболе $y^2 = 2px$ то је тзв. канонски облик једначине параболе са параметром $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

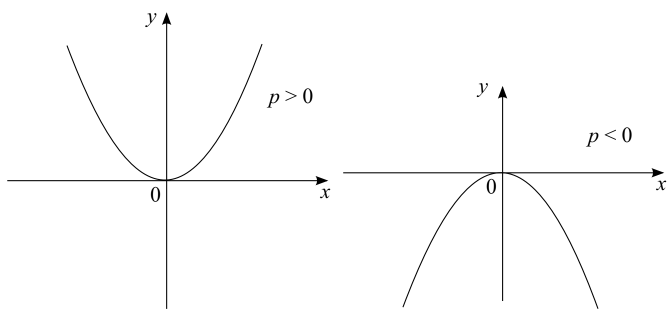
Услов додира праве $y = kx + n$ и параболе $y^2 = 2px$ је $p = 2kn$,

Једначина тангенте у тачки $M(x_0, y_0)$ је $yy_0 = p(x - x_0)$.

Парабола чија је жижа у тачки $F(0, \frac{p}{2})$ а директриса права $y = -\frac{p}{2}$ има једначину $x^2 = 2py$.



Сл. 69:



Сл. 70:

Решени задаци

1. Наћи координате тачке B симетричне тачки $A(1,-2)$ у односу на праву која пролази кроз тачке $C(5,0)$ и $D(8,-1)$.

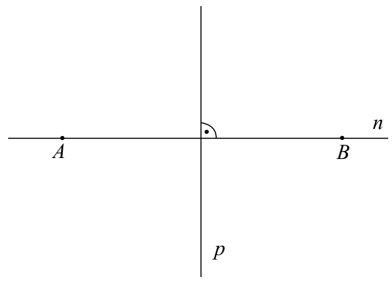
Решење: Једначина праве p одређене двема тачкама је

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

па је за тачке $C(5,0)$ и $D(8,-1)$ једначина одговарајуће праве

$$y - 0 = \frac{-1-0}{8-5}(x-5),$$

односно $x + 3y - 5 = 0$. Коефицијент правца праве p је $k_p = -\frac{1}{3}$. Права n која пролази кроз тачку A и нормална је на праву p има једначину



Сл. 71:

$y-(-2)=k_n(x-1)$ где је $k_n=-\frac{1}{k_p}=3$, па једначина праве n гласи $y+2=3(x-1)$ односно $y-3x+5=0$.

Решавањем система $\begin{cases} x+3y-5=0 \\ -3x+y+5=0 \end{cases}$ добијамо координате тачке пресека $S(2,1)$ правих p и n. Координате тачке B добијају се из услова да је је S средиште дужи AB. Дакле, из $x_s=\frac{x_A+x_B}{2}$ добија се да је $x_B=4-1=3$, из $y_S=\frac{y_A+y_B}{2}$ да је $y_s=2+2=4$. Тражена тачка је $B(3,4)$.

2. Тачке $D(0,0)$, $E(3,0)$ и $F(0,4)$ су средишта страница троугла ABC. Израчунати површину тог троугла.

Решење: Нека је D средиште странице AB, E средиште странице BC, а F средиште странице AC. Нека су координате тачака $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ и $C(x_3,y_3)$, тада је $0=\frac{x_1+x_2}{2}$, $0=\frac{y_1+y_2}{2}$, $3=\frac{x_2+x_3}{2}$, $0=\frac{y_2+y_3}{2}$, $0=\frac{x_1+x_3}{2}$ и $4=\frac{y_1+y_3}{2}$. Одавде је $x_1=-3$, $y_1=4$, $x_2=3$, $y_2=-4$, $x_3=3$, и $y_3=-4$, па је површина троугла $P_{ABC}=\frac{1}{2}|-3(-4-4)+3(3-3)+3(4+4)|=24$.

3. Показати да је троугао са теменима $A(-3,-3)$, $B(-1,3)$ и $C(11,-1)$ правоугли.

Решење: Прво треба одредити дужине страница и онда применити Питагорину теорему. Ако једнакост важи онда је заиста реч о правоуглом троуглу, а ако не онда дати троугао није правоугли.
$d(A,B)=\sqrt{(-1+3)^2+(3+3)^2}=\sqrt{40}$,
$d(A,C)=\sqrt{(11+3)^2+(-1+3)^2}=\sqrt{200}$ и

$d(B,C)=\sqrt{(11+1)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{160}$, па према Питагориној теореми: $(d(A,B))^2+(d(B,C))^2=40+160=200=(d(A,C))^2$, што показује да је троугао правоугли.

4. Површина троугла је 3, два његова темена су $A(3,1)$ и $B(1,-3)$. Тежиште тог троугла лежи на x-оси. Одредити координате трећег темена.

Решење: Тежиште има координате $T(x_T,0)$, које одрђујемо по формули $x_T=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$ и $y_T=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$.
Како је површина троугла 3, добијамо
(1) $3=\frac{1}{2}|3(-3-y_3)+(y_3-1)+x_3(1+3)|$, а $x_T=\frac{3+1+x_3}{3}$ и $0=\frac{1-3+y_3}{3}$ одакле следи $y_3=2$.
Ако то уврстимо у (1) добијамо
$3=\frac{1}{2}|3(-3-2)+(2-1)+x_3(1+3)|=\frac{1}{2}|-14+4x_3|=|-7+2x_3|=\left\{\begin{array}{c}-7+2x_3,\ \text{za}\ -7+2x_3>0\\ 7-2x_3,\ \text{za}\ -7+2x_3<0\end{array}\right.$. Одавде добијамо две вредности за x_3 и то 5 и 2, па су координате трећег темена $(5,2)$ или $(2,2)$.
Према томе, у овом задатку добијамо два троугла са теменима $A(3,1)$, $B(1,-3)$ и $C_1(5,2)$ или $A(3,1)$, $B(1,-3)$ и $C_2(2,2)$.

5. Наћи једначину праве q која је симетрична правој $p: 3x+4y-2=0$ у односу на праву $s: x-y+8=0$.

Решење: Праве p и s напишимо у експлицитном облику $p:\ y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$ и $s\ :\ y=x+8$ одакле видимо да су њихови коефицијенти праваца $k_p=-\frac{3}{4}$ и $k_s=1$. Ако је k коефицијент правца праве q, тада је $\frac{k-1}{1+k}=\frac{1+\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}$ тј. $k=-\frac{4}{3}$.
Решавањем система $\left\{\begin{array}{c}3x+4y-2=0\\ x-y+8=0\end{array}\right.$ добијамо пресечну тачку праве p и праве s, тј. $P(-\frac{30}{7},\frac{26}{7})$. На основу једначине кроз задату тачку добијамо $y-\frac{26}{7}=-\frac{4}{3}\left(x+\frac{30}{7}\right)$, тј. $4x+3y+6=0$.

6. Једначине правих на којима леже две странице паралелограма су $2x-3y+5=0$ и $3x+2y-7=0$, а једно теме тог паралелограма је $A(2,-3)$. Наћи једначине правих на којима леже друге две странице паралелограма.

Решење: Коефицијенти праваца датих правих су $k_1 = \frac{2}{3}$ и $k_2 = -\frac{3}{2}$, тј. $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ што значи да су задате праве нормалне. Даље, треба наћи једначине правих које су нормалне на задате праве и садрже тачку A. Права која је нормална на прву праву и садржи тачку A има једначину $y+3 = -\frac{3}{2}(x-2)$, односно $3x+2y=0$. Права која је нормална на другу праву и садржи тачку A има једначину
$y+3 = \frac{2}{3}(x-2)$, односно $2x-3y-13=0$.

7. Одредити једначину кружнице која пролази кроз тачке $A(2,6)$, $B(7,1)$ и $C(5,5)$.

Решење: Једначина кружнице је облика $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$. Координате центра p и q и полупречник r налазимо из услова да координате тачака A, B и C задовољавају једначину кружнице, тј. из система једначина:
$$\begin{cases} (2-p)^2+(6-q)^2=r^2 \\ (7-p)^2+(1-q)^2=r^2 \\ (5-p)^2+(5-q)^2=r^2 \end{cases}.$$
Решавањем система добијамо да је $p=2$, $q=1$ и $r=5$, па је једначина кружнице $(x-2)^2+(y-1)^2=5^2$.

8. Једначине два пречника кружнице су $x+y-14=0$ и $2x-3y+32=0$. Наћи једначину те кружнице ако она пролази кроз координатни почетак.

Решење: Координате центра кружнице добијамо у пресеку пречника те кружнице, тј. решењу система једначина:
$\begin{cases} x+y-14=0 \\ 2x-3y+32=0 \end{cases}$. Решење система је $x=6$ и $y=8$. С обзиром да кружница садржи координатни почетак, из једначине кружнице добијамо једначину $(0-6)^2+(0-8)^2=r^2$ одакле следи $r^2=100$ тј. $r=10$.

9. Наћи једначину кружнице чији је центар $C(8,6)$ тако да је права $5x-12y-46=0$ њена тангента.

Решење: Једначина задате кружнице је $(x-8)^2+(y-6)^2=r^2$, а њен полупречник одређујемо из чињенице да је права $5x-12y-46=0$ њена тангента. Пронађимо коефицијент правца и слободни коефицијент праве и уврстимо у услов додира праве и кружнице. Коефицијент правца је $k=\frac{5}{12}$, слободни коефицијент тангенте је $n=-\frac{23}{6}$, па мора да важи

$\left(6-\frac{5}{12}\cdot 8+\frac{23}{6}\right)^2 = r^2\left(1+\left(\frac{5}{12}\right)^2\right)$ одакле следи $r^2 = 36$ тј. $r = 6$, па је једначина кружнице $(x-8)^2+(y-6)^2 = 36$.

10. Наћи угао под којим се секу кружнице: $(x-3)^2+(y-1)^2 = 8$ и $(x-2)^2+(y+2)^2 = 2$.

Решење: Угао под којим се секу кружнице је угао под којим се секу тангенте на кружнице у пресечним тачкама кружница. Зато прво морамо да пронађемо пресеке кружница. Те пресеке проналазимо решавањем система једначина $\left\{\begin{array}{l}(x-3)^2+(y-1)^2=8\\(x-2)^2+(y+2)^2=2\end{array}\right.$. Систем решавамо квадрирањем бинома и одузумањем прве једначине од друге па добијамо да важе следеће еквиваленције:

$$\left\{\begin{array}{l}(x-3)^2+(y-1)^2=8\\(x-2)^2+(y+2)^2=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x^2-6x+9+y^2-2y+1=8\\x^2-4x+4+y^2+4y+4=2\end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x^2+y^2-6x-2y=-2\\x^2+y^2-4x+4y=-6\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x^2+y^2-6x-2y=-2\\\qquad 2x+6y=-4\end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x^2+y^2-6x-2y=-2\\\qquad x+3y=-2\end{array}\right.$$

Уврштавањем друге једначине у прву добијамо квадратну једначину чијим решавањем добијамо две пресечне тачке $T_1\left(\frac{17}{5},-\frac{9}{5}\right)$ и $T_2(1,-1)$. Одредимо једначине тангенти задатих кружница у заједничкој тачки T_2. $(1-3)(x-3)+(-1-1)(y-1) = 8$ и $(1-2)(x-2)+(-1+2)(y+2) = 2$. Одавде добијамо једначине тангенти $y=-x$ и $y=x-2$. Коефицијенти праваца су $k_1 = -1$ и $k_2 = 1$. Како је $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ закључујемо да је угао између тангенти $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Исто би добили да смо посматрали тангенте које садрже тачку T_1.

11. Одредити једначину елипсе код које је сума полуоса једнака 36, а растојање међу фокусима који леже на x-оси једнако 48.

Решење: Из поставке имамо да је $a+b = 36$, $e = 24$. Из $a^2 = b^2+e^2$ добијамо да важи да је $a^2 = (36-a)^2+24^2$ а одавде да је $a^2 = 1296-72a+a^2+576$ одакле следи да је $a = 26$. Из релације $b = \sqrt{a^2-e^2}$ добијамо да је $b = 10$, па је одатле једначина елипсе $100x^2+676y^2 = 67600$.

12. Наћи једначину елипсе с фокусима на x-оси чије су тангенте праве $3x-2y-20=0$ и $x+6y-20=0$.

Решење: Из експлицитних облика правих $y=\frac{3}{2}x-10$ и $y=-\frac{1}{6}x+\frac{10}{3}$ добијамо коефицијенте $k_1=\frac{3}{2}$ и $n_1=-10$ за прву праву и $-\frac{1}{6}$ и $\frac{10}{3}$ за другу праву. На основу услова додира тангенте и елипсе добијамо систем једначина
$\begin{cases} (-10)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2a^2+b^2 \\ \left(\frac{10}{3}\right)^2=\left(-\frac{1}{6}\right)^2a^2+b^2 \end{cases}$,
чијим решавањем добијамо да је $a^2=40$ и $b^2=10$, тако да је тражена једначина елипсе $10x^2+40y^2=400$, односно $x^2+4y^2=40$.

13. Одредити једначине тангенти елипсе $x^2+4y^2=100$ повучених из тачке $A(2,7)$.

Решење: Нека је $y=kx+n$ тражена једначина тангенте на елипсу $x^2+4y^2=100$ коју можемо записати и у канонском облику $\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$. Услов додира ове елипсе и праве $y=kx+n$ је $100k^2+25=n^2$. Тачка $A(2,7)$ припада правој $y=kx+n$ па је $7=2k+n$. Решавањем система једначина $\begin{cases} 7=2k+n \\ 100k^2+25=n^2 \end{cases}$ добијамо два решења: $k_1=\frac{3}{8}$ и $n_1=\frac{25}{4}$ или $k_2=-\frac{2}{3}$ и $n_2=\frac{25}{3}$, па су једначине тражених тангенти $t_1: 3x-8y+50=0$ и $t_2: 2x+3y-25=0$.

14. На елипсу $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ повучене су тангенте у крајњим тачкама велике осе. Доказати да је производ одсечака на тим тангентама које одсеца било која тангента елипсе константан и једнак b^2.

Решење: Тангенте у крајњим тачкама велике осе су: $x=\pm a$ а једначина тангенте у произвољној тачки $M(x_1,y_1)$ је $b^2xx_1+a^2yy_1=a^2b^2$, а одавде добијамо y координате пресечних тачака са правама $x=a$ и $x=-a$: $\frac{b^2(a-x_1)}{ay_1}$ и $\frac{b^2(a+x_1)}{ay_1}$ а њихов производ је b^2 што се показује коришћењем $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$.

15. Наћи тачку криве $2x^2+y^2=3$ која је најмање удаљена од праве $2x-y+4=0$.

Решење: Прво тражимо тачку додира елипсе и њене тангенте која је паралелна датој правој $p:\ 2x-y+4=0$. Коефицијент правца тангенте

једнак је коефицијенту дате праве p. Из експлицитне једначине праве p коефицијент правца праве је $k_p = 2$, па је и $k_t = 2$.
Из канонског облика елипсе $\frac{x^2}{\frac{3}{2}} + \frac{y^2}{3} = 1$ добије се $a^2 = \frac{3}{2}$ и $b^2 = 3$. Из услова додира $n^2 = a^2k^2 + b^2$, где је $k = 2$, добијамо да је $n^2 = 9$. Једначине тангенти су: $t_1 : y = 2x + 3$ и $t_2 : y = 2x - 3$. Решавањем система $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 3 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 3 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$ добијамо тачке додира $P_1(-1, 1)$ и $P_2(1, -1)$. Растојање ових тачака од праве $p : 2x - y + 4 = 0$ су $d(P_1, p) = \frac{|2(-1)-1+4|}{\sqrt{4+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ и $d(P_2, p) = \frac{|2\cdot1+1+4|}{\sqrt{4+1}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$. Према томе, тачка $P_1(-1, 1)$ је тачка елипсе која је најближа датој правој p.

16. Наћи једначине правих које пролазе кроз тачку $A(-5, 2)$ и паралелне су асимптотама хиперболе $9x^2 - 4y^2 = 36$.

Решење: Једначине асимптота су $y = \pm\frac{3}{2}x$, па праве паралелне са тим асимптотама имају једначину $y = \pm\frac{3}{2}x + b$. Будући да пролазе кроз тачку A, добићемо $2 = \pm\frac{3}{2}(-5) + b$, одакле је $b = 2 \mp \frac{3}{2}(-5)$, па је $b_1 = \frac{19}{2}$ и $b_2 = -\frac{11}{2}$, а једначине правих су $3x - 2y + 19 = 8$ и $3x + 2y + 11 = 0$.

17. На кривој $3x^2 - 4y^2 = 72$ одредити тачку најближу правој $p : 3x + 2y + 1 = 0$.

Решење: Тражена тачка је тачка додира тангенте која је паралелна датој правој p и хиперболе. Како је коефицијент правца праве $k_p = -\frac{3}{2}$, то је коефицијент правца тангенте $k_t = -\frac{3}{2}$. Из услова додира важи да је $24\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 18 = n^2$. Добија се $n = \pm6$, па су једначине тангенти хиперболе $t_1 : 3x + 2y - 12 = 0$ и $t_2 : 3x + 2y + 12 = 0$. Решавањем система $\begin{cases} 3x^2 - 4y^2 = 72 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x^2 - 4y^2 = 72 \\ 3x + 2y = -12 \end{cases}$ добијају се тачке додира $P_1(6, -3)$ и $P_2(-6, 3)$. На основу формула за растојање тачке од праве добијамо $d(P_1, p) = \frac{|3\cdot6-2\cdot3+1|}{\sqrt{9+4}} = \frac{13}{\sqrt{13}}$ и $d(P_2, p) = \frac{|-3\cdot6+2\cdot3+1}{\sqrt{9+4}} = \frac{11}{\sqrt{13}}$, одакле се види да је тачка $P_2(-6, 3)$ тражена тачка.

18. Одредити m тако да права $y = \frac{5}{2}x + m$ сече хиперболу $36x^2 - 9y^2 = 324$.

Решење: Да бисмо одредили m треба решавати систем једначина $\begin{cases} 36x^2 - 9y^2 = 324 \\ y = \frac{5}{2}x + m \end{cases}$, одавде је $36x^2 - 9\left(\frac{5}{2}x + m\right)^2 = 324$, односно

$36x^2 - 9\left(\frac{25}{4}x^2 + 5mx + m^2\right) - 324 = 0$. Одатле следи да важи једначина $9x^2+20mx+4m^2+144 = 0$. Да би права секла хиперболу, дискриминанта претходне једначине мора бити позитивна ($D > 0$), тј.

$$D = 400m^2-36(4m^2+144) = 400m^2-144m^2-144\cdot 36 = 256m^2-144\cdot 36 > 0.$$

Одавде је $-\frac{9}{2} < m < \frac{9}{2}$.

19. Задата је парабола са теменом у координатном почетку која је симетрична са x-осом и пролази кроз тачку $A(\frac{1}{3}, 4)$. Наћи једначину те параболе и удаљеност фокуса од тачке A.

Решење: Тражена једначина параболе има облик $y^2 = 2px$. Како тачка A припада параболи добићемо да је $4^2 = 2p\frac{1}{3}$, а одавде је $p = 24$, тако да је $y^2 = 2 \cdot 24 \cdot x$, односно $y^2 = 48x$ тражена једначина параболе.
Тачка $F(12, 0)$ је фокус, па је $d(A, F) = \sqrt{\left(12 - \frac{1}{3}\right)^2 + (0-4)^2} = \frac{37}{3}$.

20. Кроз тачку $P(5, 2)$ повучена је тетива параболе $y^2 = 4x$, која је том тачком преполовљена. Наћи једначину кружнице која пролази кроз крајње тачке поменуте тетиве и кроз пресек оних тангената параболе које су повучене у крајњим тачкама тетиве.

Решење: Из услова да тачка P средина тетиве добија се да су крајње тачке тетиве $A(9, 6)$ и $B(1, -2)$**.** Једначине тангенти у тим тачкама су $yy_0 = p(x + x_0)$, тј. $y \cdot 6 = 2(x + 9)$ одакле следи да је $6y = 2x + 18$ тј. $x - 3y + 9 = 0$ и $y \cdot (-2) = 2(x + 1)$ одакле је $x + y + 1 = 0$. Решавањем система једначина $\begin{cases} x - 3y + 9 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$ добијамо да је $x = -3$ и $y = 2$ што представља координате њихове пресечне тачке $C(-3, 2)$. Једначина тражене кружнице је $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 15 = 0$.

21. Под којим углом треба да је нагнута према оси параболе $y^2 = 2px$ она њена тетива која пролази кроз жижу да би њена дужина била четри пута већа од дужине параметра p? Како гласи једначина те тетиве и колики угао чине међу собом тангенте параболе повучене у њеним крајњим тачкама?

Решење: Једначина тетиве која пролази кроз жижу дате параболе је $y = k(x - \frac{p}{2})$, а координате њених пресечних тачака са параболом су $x_{1,2} = \frac{p(k^2+2)\pm 2p\sqrt{k^2+1}}{2k^2}$ и $y = \frac{p\pm\sqrt{k^2+1}}{k}$. Дужина тетиве је

$$\left(\frac{p(k^2+2)+2p\sqrt{k^2+1}-p(k^2+2)+2p\sqrt{k^2+1}}{2k^2}\right)^2+$$
$$+\left(\frac{p+p\sqrt{k^2+1}-p-p\sqrt{k^2+1}}{k}\right)^2=16p^2$$

или после сређивања $3k^4-2k^2-1$ одакле је $k^2=1$ и $k^2=-\frac{1}{3}$, тј. $k=\pm 1$, па је једначина тетиве $2x-2y-p=0$ или $2x+2y-p=0$ и нагнута је према оси параболе под углом од $\alpha=45°$, а коефицијенти праваца тангената у тим тачкама су $k_{1,2}=\frac{k}{1\pm\sqrt{k^2+1}}=\frac{1}{1\pm\sqrt{2}}$ и $k_1\cdot k_2=-1\Rightarrow\alpha=90°$.

22. На параболи $x^2=8y$ повучена је тангента паралелно са правом $4x-y-32=0$, па је из жиже спуштена нормала на тангенту. Одредити: а) површину троугла чија су темена жижа параболе, додирна тачка поменуте параболе и пресечна тачка тангенте са нормалом спуштена из жиже на тангенту и једначине његових страна; б) једначину кружнице описане око троугла.

Решење:
а) Једначина праве паралелне са датом правом је $y=4x+n$, а да би додиривала параболу треба да важи услов додира тј. $25x+8n=0$, одакле је $n=32$, па је једначина тангенте: $4x-y-32=0$, а њена додирна тачка је $M(16,32)$. Темена троугла су $F(0,2)$, $A(8,0)$ и $M(16,32)$, па је тражена површина троугла $P=136$.
б) једначине страна троугла су $FA:\ x+4y-8=0$, $AM:\ 4x-y-32=0$ и $15x-8y+16=0$. Једначина описане кружнице је :
$(x-8)^2+(y-17)^2=289$.
(једначина кружнице кроз три тачке)

Задаци за вежбу

1. Нека су $A(-2,5)$ и $B(4,17)$ крајње тачке дужи AB. На тој дужи наћи координате тачке C за које је $d(A,C)=2d(B,C)$.
Резултат: $C(8,2)$.

2. Одредити ортогоналну пројекцију тачке $T(-6,4)$ на праву $4x-5y+3=0$.
Резултат: $T'(-4,-1)$.

3. Наћи једначину праве која пролази кроз тачку $A(2, -4)$ и удаљена је од координатног почетка 2.
Резултат: $3x + 4y + 10 = 0$.

4. У једнакокраком правоуглом троуглу ABC задате су координате темена $A(2, 6)$, из које је оштри угао и једначина катете $BC: x - 7y + 15 = 0$. Одредити једначине других двеју страница.
Резултат: $y - 6 = \frac{4}{3}(x - 2)$ и $y - 6 = -\frac{4}{3}(x - 2)$.

5. Задате су праве $p: 2x - y - 11 = 0$, $q: x - y - 7 = 0$ и $r: 3x + 2y + 2 = 0$. Наћи праву s, која пролази кроз пресечну тачку правих p и q, и
а) тачку $A(2, 3)$**,**
б) паралелна је правој r,
в) нормална је на праву r.
Резултат: а) $3x + y - 9 = 0$, б) $3x + 2y - 6 = 0$, в) $2x - 3y - 17 = 0$.

6. На правој $x + y + 2 = 0$ одредити тачку подједнако удаљену од тачака $A(1, -2)$ и $B(3, 6)$.
Резултат: $M(-6, 4)$.

7. Одредити координате центра и полупречник кружнице $x^2 + 4x + y^2 - 2y + \frac{20}{9} = 0$.
Резултат: $C(-2, 1)$, $r = \frac{5}{3}$.

8. Наћи једначину кружнице која садржи тачку $A(3, 4)$ и додирује праву $x - y - 1 = 0$, с тим да је полупречник $r = \sqrt{2}$.
Резултат: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2$ и $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 2$.

9. Из тачке $A(1, 6)$ повучене су тангенте на кружницу $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$. Одредити једначине тих тангенти.
Резултат: $t_1 : y = -2x + 8$, $t_2 : y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$.

10. Дата је једначина елипсе $9x^2 + 25y^2 = 225$. Одредити:
а) полуосе елипсе,
б) ексцентрицитет,
в) ккоринате фокуса.
Резултат: а) $a = 5$, $b = 3$, б) $\epsilon = \frac{3}{5}$, в) $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$.

11. Одредити површину троугла чија се два темена налазе у фокусима елипсе $x^2 + 4y^2 = 36$, а треће у оној тачки у којој су радијус вектори

r_1 и r_2 нормални.
Резултат: $P = 9$.

12. Под којим углом се види елипса $x^2 + 2y^2 = 6$ из центра кружнице $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 16 = 0$.
Резултат: То је угао између тангенти на елипсу које садрже центар кружнице 66°2'14".

13. Одредити параметар m тако да права $x + 2y = m$ буде тангента елипсе $x^2 + 2y^2 = 12$.
Резултат: $m = \pm 6$.

14. На кривој $x^2 + 2y^2 = 9$ одредити тачку најближу правој $x - 4y - 10 = 0$.
Резултат: $P(1, -2)$.

15. Сума полуоса хиперболе је 17, а ексцентрицитет $\epsilon = \frac{13}{12}$. Одредити:
а) једначину хиперболе,
б) координате фокуса,
в) асимптоте хиперболе.
Решење: а) $25x^2 - 144y^2 = 3600$, б) $F_1(-13, 0)$, $F_2(13, 0)$, в) $y = \pm\frac{5}{12}x$

16. Одредити m тако да права $y = \frac{5}{2}x + m$ буде тангента хиперболе $36x^2 - 9y^2 = 324$.
Резултат: $m = \pm\frac{9}{2}$.

17. Наћи једначину хиперболе чије су асимптоте праве $y = \pm\frac{1}{2}x$ и која садржи тачку $A(8, 2\sqrt{3})$.
Резултат: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$.

18. Одредити удаљеност од центра кружнице $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 5 = 0$ до асимптота хиперболе $9x^2 - 16y^2 = 144$.
Резултат: $d_1 = 1$, $d_2 = 2,6$.

19. У једначини параболе $y^2 = 2px$ одредити вредност параметра p, тако да она пролази кроз тачку $A(1, 4)$ и наћи затим дужину радијус вектора тачке A.
Резултат: $p = 8$, $r = 5$.

20. На параболи $y^2 = 32x$ растојање од тачке A до тачке B је 10. Наћи једначину кружнице чији је пречник одсечак AB.
Резултат: $(x-2)^2 + y^2 = 64$.

21. Теме параболе лежи на крају једног пречника кружнице $x^2 + y^2 = 9$. Наћи једначину параболе ако права која пролази пресечним тачкама кружнице и параболе има једначину $y - 2 = 0$.
Резултат: $x^2 = y + 3$ или $y^2 = -5(y-3)$.

14 Аритметички и геометријски низови

Прогресија је $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ низ бројева где се n-ти члан низа a_n може одредити на основу претходног $n-1$ члана. То значи да је $a_n = f(a_{n-1})$. У зависности од функције $f(x)$ разликујемо разне врсте низова. Најчешће се користе аритметичка и геометријска прогресија. Када причамо о члановима низа a_n подразумева да је $n \in \mathbb{N}$.

14.1 Аритметичка прогресија

Ако је $a_n = a_{n-1} + d$ тада кажемо да је низ бројева $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ аритметичка прогресија. Број d називамо разликом (или диференцијом) аритметичке прогресије. Произвољни n-ти члан аритметичке прогресије се може израчунати по формули $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$. Можемо приметити да важи и да је $a_n - a_{n-1} = d$, $n > 1$. Збир првих n чланова аритметичке прогресије се може израчунати по формули $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n$. За аритметички низ важи и особина да је сваки члан прогресије једнак аритметичкој средини чланова који су подједнако удаљени од њега (ако такви постоје), тј. $a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$ где је $n \geq 2$, $k < n$.

14.2 Геометријска прогресија

Ако је $a_n = a_{n-1} \cdot q$ где је $a_1 \neq 0$ и $q \neq 0$ тада кажемо да је низ бројева $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ геометријска прогресија. Број q називамо количником геометријског низа. Произвољни n-ти члан геометријске прогресије се може израчунати по формули $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Можемо приметити да важи и да је $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$, $n > 1$. Збир првих n чланова геометријске прогресије се може израчунати по формули $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$, где је $q \neq 1$. Слично аритметичкој прогресији постоји веза и у геометријској прогресији између члана и чланова који су подједнако удаљени са леве и са десне стране: сваки члан геометријске прогресије је геометријска средина чланова који су подједнако удаљени од њега ако такви чланови постоје, тј. $a_n^2 = a_{n-k} \cdot a_{n+k}$ где је $n \geq 2$, $k < n$.

Решени задаци:

1. Задат је низ 1, 4, 7, 10, ... Наћи 25. члан и суму првих 25 чланова низа.

Решење: Задати низ је аритметички низ где је $d = 3$ и $a_1 = 1$ тако да је $a_{25} = a_1 + (25-1)\cdot d = 1 + 24\cdot 4 = 73$ и
$s_{25} = \frac{25}{2}(a_1 + a_{25}) = \frac{25}{2}(1+73) = 25\cdot 37 = 925.$

2. Одредити суму свих двоцифрених природних бројева.

Решење: Из услова задатка следи да је $a_1 = 10$ и $a_{90} = 99$, па је
$s_{90} = \frac{90}{2}(10+99) = 45\cdot 109 = 4905.$

3. Девети члан аритметичког низа је пет пута већи од другог члана, а при дељењу тринаесетог члана са честим чланом добија се количник 2 и остатак 5. Који је то низ?

Решење: Према услову задатка важи да је $\left\{\begin{array}{c} a_9 = 5\cdot a_2 \\ a_{13} = 2a_6 + 5 \end{array}\right.$. Одатле важи еквиваленција
$\left\{\begin{array}{c} a_1 + 8d = 5\cdot(a_1+d) \\ a_1 + 12d = 2(a_1+5d)+5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 3d = 4a_1 \\ 2d - 5 = a_1 \end{array}\right.$. Решавањем претходног система добијамо $\left\{\begin{array}{c} d = 4 \\ 3 = a_1 \end{array}\right.$, па је тражени низ 3, 7, 11, 15, ...

4. Три броја чине аритметички низ, тако да њихова сума износи 6, а сума њихових квадрата је 110. Наћи тај низ.

Решење: Нека су $a-d$, a и $a+d$ три члана низа. Одатле је њихов збир $a - d + a + a + d = 6$ и $(a-d)^2 + a^2 + (a+d)^2 = 110$. Ове две једначине образују систем $\left\{\begin{array}{c} 3a = 6 \\ 3a^2 + 2d^2 = 110 \end{array}\right.$ чијим решавањем добијамо $a = 2$ а друга једначина је по уврштавању $(2-d)^2 + 4 + (2+d)^2 = 110$, односно $2d^2 + 12 = 110$. Одавде је $d = \pm 7$ тако да је тај низ $-5, 2, 9$.

5. Трећи члан аритметичког низа је 9, а разлика између седмог и другог члана је 20. Колико чланова низа треба сабрати да би њихова сума била 91?

Решење: Из услова задатка важи да је $\left\{\begin{array}{c} a_7 - a_2 = 20 \\ a_3 = 9 \end{array}\right.$ одакле следи да је $\left\{\begin{array}{c} a_1 + 6d - a_1 - d = 20 \\ a_1 + 2d = 9 \end{array}\right.$ чијим сређивањем добијамо систем једначина $\left\{\begin{array}{c} 5d = 20 \\ a_1 + 2d = 9 \end{array}\right.$. Решавањем претходног система добијамо решења

$\begin{cases} d=4, \\ a_1=1. \end{cases}$. Из формуле $s_n = \frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$, $n \in \mathbb{N}$ следи да важи $91 = \frac{n}{2}(2\cdot 1+(n-1)4)$ односно $2n^2-n-91=0$, па решавањем квадратне једначине добијамо $n=7$ или $n=-\frac{27}{4}$. Одавде следи да треба узети 7 чланова низа да би се добио збир 91.

6. Сума првих n чланова аритметичког низа је $s_n = \frac{3n^2+9n}{2}$ одредити први члан a_1 и разлику d.

Решење: $s_n = \frac{n}{2}(3n+9) = \frac{n}{2}(12+3n-3) = \frac{n}{2}(2\cdot 6+3(n-1))$. Ако упоредимо релације $a_n = a_1+(n-1)d$ и $s_n = \frac{n}{2}(2\cdot 6+3(n-1))$, добићемо да је $a_1 = 6$ и $d = 3$.

7. Наћи број чланова геометријског низа код којег је $b_1 = -1$, $b_n = -81$ и $q = 3$.

Решење: Из релације $b_n = b_1 q^{n-1}$ добијамо да је $-81 = -1\cdot 3^{n-1}$, а одавде је $3^{n-1} = 3^4$, тј. $n = 5$.

8. Сума свих чланова бесконачног геометријског низа је $\frac{2}{3}$, а сума квадрата чланова истог низа је $\frac{4}{3}$. Који је то низ?

Решење: Сума свих чланова геометријског низа постоји ако је $|q|<1$. Квадрати таквог низа такође образују геометријски низ, чији је количник $q' = q^2$, а први члан $a_1' = a_1^2$ и збир свих чланова тог низа је исто коначан. Зато је

$\begin{cases} a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots = \frac{2}{3} \\ a_1^2+a_1^2q^2+a_1^2q^4+\cdots = \frac{4}{3} \end{cases}$ одакле следи да је $\begin{cases} \frac{a_1}{1-q} = \frac{2}{3} \\ \frac{a_1^2}{1-q^2} = \frac{4}{3} \end{cases}$ тј.

$\begin{cases} a_1 = \frac{2}{3}(1-q) \\ \frac{\frac{4}{9}(1-q)^2}{1-q^2} = \frac{4}{3} \end{cases}$. Уврштавањем прве једначене у другу добијамо

$\begin{cases} a_1 = \frac{2}{3}(1-q), \\ \frac{1}{3}(1-2a+q^2) = 1-q^2, \end{cases}$ одакле следи $\begin{cases} a_1 = \frac{2}{3}(1-q), \\ 4q^2-2q-2=0. \end{cases}$ Из друге једначине добијамо да је $q=1$ или $q=-\frac{1}{2}$ (према условима задатка $|q|<1$ па је $q=-\frac{1}{2}$ и $a_1=1$). Према томе тражени низ је $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$

9. Три броја су узастопни чланови низа ако је сума првог и трећег 52, а квадрат другог 100. Одредити та три броја.

Решење: Нека су b_1, b_2 и b_3 чланови геометријског низа, тада је $\begin{cases} b_1 + b_3 = 52 \\ b_2^2 = 100 \end{cases}$ на основу формуле $b_n = b_1 q^{n-1}$ је $\begin{cases} b_1 + b_1 q^2 = 52 \\ (b_1 q)^2 = 100 \end{cases}$. Решавањем система добијамо четри решења:

$b_1 = 2$ и $q = 5$, тако да је $b_2 = 10$, $b_3 = 50$**,**

$b_1 = 50$ и $q = \frac{1}{5}$, тако да је $b_2 = 10$, $b_3 = 2$**,**

$b_1 = 2$ и $q = -5$, тако да је $b_2 = -10$, $b_3 = 50$**,**

$b_1 = 50$ и $q = -\frac{1}{5}$, тако да је $b_2 = -10$, $b_3 = 2$**.**

10. Наћи први члан b_1 геометријског низа ако је разлика између трећег и првог члана 3 и разлика између другог и трећег члана 6.

Решење: На основу формуле $b_n = b_1 q^{n-1}$ добијамо $\begin{cases} b_1 q^2 - b_1 = 3 \\ b_1 q - b_1 q^2 = 6 \end{cases}$, односно $\begin{cases} b_1 q(q - b_1) = 3 \\ b_1 q(1 - q) = 6 \end{cases}$. Поделимо ли другу једначину система са првом једначином добићемо $\frac{b_1 q(1-q)}{b_1 q(q-b_1)} = \frac{6}{3}$, одавде је за $b_1 \neq 0$, $q \neq 1$ $\frac{q}{q+1} = -2 \Rightarrow q = -\frac{2}{3}$.
Из прве једначине система добијамо да је $b_1 = \frac{3}{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 1} = -\frac{27}{5}$.

11. Збир три броја је 14. Ако се средњи повећа за 1, добиће се аритметички низ, а акко се смањи за 1 добиће се геометријски низ. Који су то бројеви?

Решење: Тражени бројеви су x, y и z. На основу претпоставки задатка можемо формирати систем једначина

$$\begin{cases} x + y + z = 14 \\ y + 1 - x = z - y - 1 \\ \frac{y-1}{x} = \frac{z}{y-1} \end{cases}.$$

Решавањем система добијамо да је $x = 1$, $y = 4$ и $z = 9$ или $x = 9$, $y = 4$ и $z = 1$.

Задаци за вежбу

1. Сума првих пет чланова аритметичког низа је 39, а други члан је 5. Одредити суму првих осам чланова тог низа.
   Резултат: $S_8 = 96$.

2. Колико чланова аритметичког низа 5, 9, 13, 17, ... треба узети да би њихова сума била 10877.
   Резултат: $n = 73$.

3. У аритметичком низу од 20 чланова, сума чланова на парним местима износи 250, а оних на непарним 220. Одредити два средња члана тог низа.
   Резултат: 22 и 25.

4. Странице правоуглог троугла чине аритметички низ. Израчунати странице тог троугла, ако је висина над хипотенузом 24.
   Резултат: 30, 40, 50. (упутство: користити Питагорину теорему и сличност троуглова).

5. Збир првог и седмог члана сритметичког низа је 2, а разлика између шестог и другог члана је 8. Колико чланова низа треба сабрати да би њихов збир био 16?
   Резултат: $n = 8$.

6. Збир прва 4 члана растућег аритметичког низа је 26, а производ другог и трећег члана је 40. Који је то низ?
   Резултат: $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 8$,...

7. Одредити број чланова геометријског низа код којег је $b_1 = -1$, $b_n = -81$, $q = 3$.
   Резултат: $n = 5$.

8. Три броја чине геометријски низ. Ако се други члан тог низа увећа за 8, тај низ постаје аритметички, а ако се у том новом низу трећи члан увећа за 64, постаће геометријски. Одредити те бројеве.
   Резултат: Упутство аритметички низ је a, $aq + 8$, aq^2, а a, $aq + 8$, $aq^2 + 64$ је геометријски низ. На крају добијамо да је низ 4, 12, 36 или $\frac{4}{9}$, $-\frac{20}{9}$, $\frac{100}{9}$.

9. У геометријском низу где је $a_n = 384$, $a_{n-1} = 192$ и $s_n = 765$. Наћи n и a_{10}.
Резултат: $n = 8$, $a_{10} = 1536$.

10. Збир прва три члана геометријског низа је 91. Ако тим члановима додамо, редом, 25, 27 и 1 добићемо три броја који образују аритметички низ. Наћи седми члан датог геометријског низа.
Резултат: $b_7 = 5103$ ако је $b_1 = 7$ и $q = 3$, или $b_7 = \frac{7}{81}$ ако је $b_1 = 63$ и $q = \frac{1}{3}$.

15 Биномна формула

Факторијел природног броја n, у ознаци $n!$ (чита се ен факторијел) је производ свих природних бројева мањих или једнаких n. Дакле, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$. По дефиницији је $0! = 1$.
Ако је n ненегативан цео број тада се дефинише

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}, k \in \mathbb{N}$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

($\binom{n}{k}$ се чита ен над ка)
Формула

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

где је n природан број називамо Биномном формулом (или Њутновом биномном формулом).
Коефицијенти чланова на десној страни $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, ... $\binom{n}{n}$ су природни бројеви и зову се биномни коефицијенти.
За биномне коефицијенте важе особине

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

У специјалним случајевима важе познате формуле

$$(a+b)^1 = a + b,$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Решени задаци

1. Доказати да је сума биномних коефицијената свих чланова развоја бинома једнака 2^n.

Решење: Ако у биномну формулу ставимо $a = b = 1$, добићемо

$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$, што је и требало доказати.

2. Наћи тринеасти члан развоја бинома $\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}\right)^{15}$.

Решење: Тринаести члан је

$$\binom{15}{12}\left(\sqrt[3]{3}\right)^3\left(\sqrt{2}\right)^{12} = \binom{15}{3}3 \cdot 2^6 = \tfrac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 3 \cdot 64 = 87360.$$

3. Наћи седми члан у развоју бинома $\left(a^2\sqrt{a} + \frac{\sqrt[3]{a}}{a}\right)^n$, ако је биномни коефицијент трећег члана једнак 36.

Решење: Из услова задатка је $\binom{n}{2} = 36$, тј. $\frac{n(n-1)}{2} = 36$, одакле добијамо $n = 9$. Онда је седми члан развоја бинома $\binom{9}{6}\left(a^{\frac{5}{2}}\right)^3\left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^6 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot a^{\frac{15}{2}-4} = 84a^3\sqrt{a}$.

4. Који члан развоја бинома $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}\right)^{16}$ не садржи x.

$\binom{16}{k}\left(\sqrt[3]{x}\right)^{16-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k = \binom{16}{k}x^{\frac{16-k}{3}} \cdot x^{-k} = \binom{16}{k}x^{\frac{16-4k}{3}}$

Решење: Одредимо k из услова $\frac{16-4k}{3} = 0 \Rightarrow k = 4$. Значи, пети члан развоја бинома не садржи x.

5. Наћи пети члан развоја бинома $\left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{3a}}\right)^n$, ако је однос биномног коефицијента четвртог и биномног коефицијента трећег члана једнак $\frac{10}{3}$.

Решење:

$\frac{\binom{n}{3}}{\binom{n}{2}} = \frac{10}{3}$ одакле следи$3\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10\frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2}$ тј. $n = 12$.

Тада је пети члан развоја бинома $\left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{3a}}\right)^{12}$ једнак

$$\binom{12}{4}\left(\sqrt{a}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3a}}\right)^4 = \tfrac{10 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}a^4 \cdot \tfrac{1}{9a^2} = 55a^2.$$

6. Наћи суму биномних коефицијената чланова, који се налазе на непарним местима у развоју бинома $(x+y)^n$ ако је биномни коефицијент трећег члана за 9 већи од биномног коефицијента другог члана.

Решење: По услову задатка $\binom{n}{2}-\binom{n}{1}=9$ одакле следи $\frac{n(n-1)}{2}-\frac{n}{1}=9$ тј. $n=6$. Одавде је сума биномних коефицијената чланова, који се налазе на непарним местима у развоју бинома $\binom{6}{0}+\binom{6}{2}+\binom{6}{4}+\binom{6}{6}=32$.

Задаци за вежбу

1. Разложити по биномној формули и упростити $\left(x+\frac{1}{2x}\right)^8$.
   Резултат: $x^8+4x^6+7x^4+7x^2+\frac{35}{8}+\frac{7}{4x^2}+\frac{7}{16x^4}+\frac{1}{256x^8}$.

2. Наћи шести члан развоја бинома $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{15}$.
   Резултат: 3003.

3. Наћи у развоју бинома $\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^{18}$ члан који не садржи x.
   Резултат: $\binom{18}{9}$.

4. Наћи члан у развоју бинома $\left(\frac{1}{x}-x\sqrt[3]{x^2}\right)^n$ који не садржи x ако се зна да је збир свих биномних коефицијената 256.
   Резултат: $(-1)^3\binom{8}{3}=-56$.

5. Наћи члан развоја бинома $\left(n\sqrt[5]{x}+\frac{\sqrt[3]{x}}{2}\right)^n$, који садржи $x^2\sqrt[5]{x^4}$ ако је збир биномних коефицијената прва три члана једнак 56.
   Резултат: седми члан има тражени особину и једнак је $840x^2\sqrt[5]{x^4}$.

16 Комплексни бројеви

Алгебарски облик комплексног броја је $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$. Бројеви x и y су, редом, реални и имагинарни делови комплексног броја z, што означавамо са $Re(z) = x$ и $Im(z) = y$, а i је имагинарна јединица. Ако су $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ дати комплексни бројеви, тада је

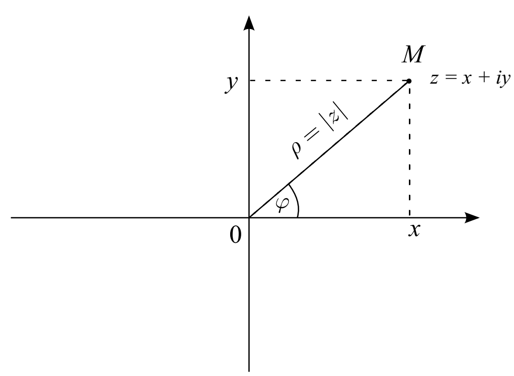
$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2,$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_1y_2 + y_1x_2),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}, \;\; z_2 \neq 0.$$

Конјуговано комплексни број броју $z = x + iy$ је број $\overline{z} = x - iy$.
Комплексне бројеве представљамо тачкама у равни Декартовог правоуглог координатног система (Гаусова раван). Реални део се представља на оси x (реална оса) а имагинарни на оси y (имагинарна оса).
Комплексни број $z = x+iy$ се може записати у тригонометријском облику $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где је ρ модул, а φ аргумент комплексног броја (сл. 72), где је $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ а $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$, $x \neq 0$.



Сл. 72:

Целобројни степен имагинарне јединице одређен је са: $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$ и $i^{4k+3} = -i$ $(k \in \mathbb{Z})$.
Ако су $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, тада је

$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2\,[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$,

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\,[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]$, $z_2 \neq 0$.

Ако је $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ тада је $z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n})$, $k = 0,1,2,...,n-1$. Ове формуле се називају Моаврове формуле.

Решени задаци

1. Израчунати комплексне бројеве: а) $z = \frac{3+4i}{2-i} - \frac{5i}{i+3}$, б) $z = \frac{3+i}{(2-i)^2}$.

Решење:

а) $z = \frac{3+4i}{2-i} - \frac{5i}{i+3} = \frac{3+4i}{2-i}\cdot\frac{2+i}{2+i} - \frac{5i}{i+3}\cdot\frac{-i+3}{-i+3} =$
$= \frac{6+3i+8i+4i^2}{4-i^2} + \frac{-5i^2+15i}{9-i^2} =$
$= \frac{2+11i}{5} - \frac{5+15i}{10} = \frac{4+22i-5-15i}{10} =$
$= -\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i.$

б) $z = \frac{3+i}{(2-i)^2} = \frac{3+i}{4-4i+i^2} = \frac{3+i}{3-4i} =$
$= \frac{3+i}{3-4i}\cdot\frac{3+4i}{3+4i} = \frac{(3+i)(3+4i)}{9-16i^2} =$
$= \frac{9+3i+12i+4i^2}{25} =$
$= \frac{5+15i}{25} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i.$

2. Одредити реални и имагинарни део комплексног броја
а) $z = \frac{3-2i}{2+i} + \frac{2-i}{3+i}$, б) $z = \frac{(2+i)(1-2i)}{3-i} + \frac{(-1+3i)(1-i)}{2+i}$, в) $\frac{z-\bar{z}}{1+z\bar{z}}$ ако је $z = 1+i$.

Решење:

а) $z = \frac{3-2i}{2+i} + \frac{2-i}{3+i} = \frac{3-2i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}\cdot + \frac{2-i}{3+i}\cdot\frac{3-i}{3-i} =$
$= \frac{6-7i+2i^2}{4-i^2} + \frac{6-5i+i^2}{9-i^2} = \frac{4-7i}{5} + \frac{5-5i}{10} =$
$= \frac{8-14i}{10} + \frac{5-5i}{10} = \frac{13-19i}{10} = \frac{13}{10} - \frac{19}{10}i.$

Дакле $Re(z) = \frac{13}{10}$ и $Im(z) = -\frac{19}{10}$.

б) $z = \frac{(2+i)(1-2i)}{3-i} + \frac{(-1+3i)(1-i)}{2+i} =$
$= \frac{2-3i-2i^2}{3-i} + \frac{-1+4i-3i^2}{2+i} = \frac{4-3i}{3-i} + \frac{2+4i}{2+i} =$
$= \frac{4-3i}{3-i}\cdot\frac{3+i}{3+i} + \frac{2+4i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i} =$
$= \frac{12-5i-3i^2}{9-i^2} + \frac{4+6i-4i^2}{4-i^2} =$
$= \frac{15-5i}{10} + \frac{8+6i}{5} =$
$= \frac{31+7i}{10} = \frac{31}{10} + \frac{7}{10}i.$

Одатле је $Re(z) = \frac{31}{10}$ и $Im(z) = \frac{7}{10}$.

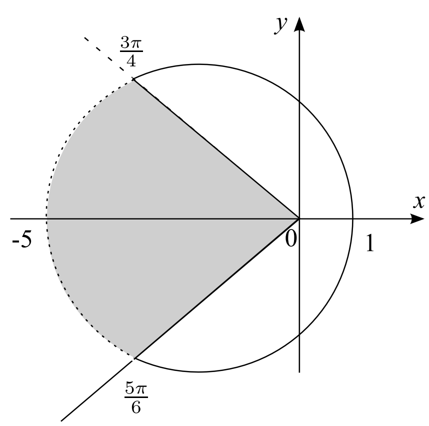
в) $\frac{z-\overline{z}}{1+z\overline{z}} = \frac{x+iy-(x-iy)}{1+(x+iy)(x-iy)} = \frac{2iy}{1+x^2+y^2} = \frac{2i}{1+1+1} = \frac{2}{3}i.$
Дакле $Re(z) = 0$ и $Im(z) = \frac{2}{3}$.

3. Одредити комплексни број који задовољава $|z| - z = 3 - 2i$.

Решење: Ако је $z = x + iy$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, важи да је
$\sqrt{x^2 + y^2} - x - iy = 3 - 2i$.
Два комплексна броја су једнака када су им једнаки реални делови и када су им једнаки имагинарни делови, па добијамо систем једначина
$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - x = 3 \\ \quad -y = -2 \end{cases}$ одакле следи $\sqrt{x^2 + 4} = 3 + x$ тј. $x^2 + 4 = 9 + 6x + x^2$.
Из претходне једначине добијамо да је $6x = -5$ односно $x = -\frac{5}{6}$. Дакле $z = -\frac{5}{6} + 2i$.

4. Где леже тачке у комплексној (Гаусовој) равни за које су испуњени услови: $|z + 2| < 3$ и $\frac{3\pi}{4} < arg\, z \leq \frac{7\pi}{6}$?

Решење: Ако је $z = x + iy$, тада $|z+2| = |x+iy+2| = \sqrt{(x + 2)^2 + y^2} < 3$, одавде је $(x+2)^2+y^2 < 9$. Тачке леже у исцртаном делу равни укључујући тачку кружнице и тачке на делу праве $arg\, z = \frac{7\pi}{6}$ (сл. 73)



Сл. 73:

5. Ако је $f(z) = 2 + z + 3z^2$, израчунати $f(\overline{z})$ за $z = 3 + 2i$.

Решење: $f(\overline{z}) = f(3 - 2i) = 2 + 3 - 2i + 3(3 - 2i)^2 = 20 - 38i$.

Задаци за вежбу

1. Израчунати
   а) $i^{25}+(-i)^{50}+i^{62}+i^{83}$.
   Резултат: -2.
   б) $(-i)^{62}-i^{102}+i^{-112}+i^{201}$.
   Резултат: $-2i$.
   в) $i^{-256}+i^{602}+i^{408}$.
   Резултат: 1.

2. Израчунати вредност израза:
   а) $\frac{6+i}{2-i}(4+3i)$.
   Резултат: $4+13i$.
   б) $\frac{z+\overline{z}}{2y+3}$ ако је $z=\frac{1-i}{2}$.
   Резултат: $\frac{i-2}{3}$.
   в) $\frac{i+1}{1+i^3.}$.
   Резултат: i.
   г) $(1+i\sqrt{3})^6$.
   Резултат: 2^6.

3. Представити у тригонометријском облику комплексни број $z=-1+i$.
   Резултат: $z=\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$.

4. Наћи z тако да је $\overline{z}=z^2$.
   Резултат: $z_1=0$, $z_2=1$, $z_{3,4}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

17 Пропорције и процентни рачун

Количник реалних бројева a и b $(b \neq 0)$, тј. број $a : b = \frac{a}{b}$ назива се пропорција (размера) бројева a и b.
Код пропорције је производ спољашњих чланова једнак производу унутрашњих, тј. $a : b = c : d \Rightarrow ad = bc$.
Проценат је разломак чији је именилац 100. Израчунати $p\%$ од броја x значи наћи $\frac{p}{100}$ тог броја, тј. наћи $\frac{p \cdot x}{100}$.
У процентном рачуну основне величине су: главница G, процентна стопа p и процентни износ P. Важи пропорција $G : P = 100 : p$, па се поједине величине рачунају формулама:
$G = \frac{100P}{p}$, $P = \frac{G \cdot p}{100}$, $p = \frac{100P}{G}$.

Решени задаци

1. Неки посао заврши 9 радника за 20 дана радећи 10 сати дневно. Колико радника ће радећи 12 сати дневно завршити тај посао за 15 дана?

Решење: Број радника који тражимо обележимо са x. Одатле је
$9 : x = (12 \cdot 15) : (10 \cdot 20) \Rightarrow 9 \cdot 10 \cdot 20 = 12 \cdot 15x \Rightarrow x = 10$.

2. Ако 5 машина које раде 10 сати дневно ископају за 12 дана 1400 m^3 земље, колико ће ископати 8 машина радећи 8 сати дневно за 6 дана?

Решење: Означимо са x број m^3 ископане земље који тражимо.
$(5 \cdot 10 \cdot 12) : 1400 = (8 \cdot 8 \cdot 6) : x \Rightarrow 5 \cdot 10 \cdot 12 \cdot x = 1400 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 6 \Rightarrow x = \frac{1400 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 6}{5 \cdot 10 \cdot 12} = 896$.
Па је $x = 896\ \mathrm{m}^3$.

3. Цена од 12000 динара неког производа снижена је за 14%. Израчунати колико износи снижење.

Решење: $p = 14\%$, $G = 12000$, $P = ?$
$P = \frac{12000 \cdot 14}{100} = 1680$.
Одавде закључујемо да снижење износи $P = 1680$.

4. Сума је 7000 динара. Израчунати колико процената те суме износи 550 динара.

Решење:
$G = 7000$, $P = 550$, $p =?$.
$p = \frac{550 \cdot 100}{7000} = 7,86$.
Тражени проценат је $p = 7,86\%$.

Задаци за вежбу

1. Израчунати 7% од 12000 динара.
   Резултат: 840 динара.

2. У 73 литра аклохолног пића налази се 67 литара воде. Колико у овом алкохолном пићу има алкохола.
   Резултат: 19,28%.

3. После снижења од 20% роба се продаје 48000 динара. Израчунати: а) за колико је динара снижена цена, б) колико би износила продајна цена да је снижење износило 25% од првобитне цене.
   Резултат: а) 12000 динара; б) 45000 динара.

Решени задаци са пријемних испита одржаних на Војној академији

Пријемни испит 2013 - тест 1

1. Вредност израза $\left(\frac{2}{15}:\frac{50}{63}+\frac{10}{27}\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^{-2}+\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}\right)^{-\frac{1}{3}}+25^{-0,5}:1,2$ је:
   А) $\frac{5}{6}$; Б) 1; В) $\frac{6}{5}$; Г) 2; Д) $\frac{1}{2}$; Н) не знам.

2. После сређивања израз $\left[\frac{a}{b}\left(\frac{1}{b}-\frac{b^2}{a^3}\right)\right]:\left[\frac{1}{b^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a^2}\right]$где је $ab\neq 0$, једнак је:
   А) $\frac{1}{ab}$; Б) $a+b$; В) $a-b$; Г) $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$; Д) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$; Н) не знам.

3. Целобројних решења неједначине $\frac{x^2-x-2}{x^2+6x+5}\leq 0$ има:
   А) 6; Б) 5; В) 7; Г) 8; Д) 9; Н) не знам.

4. Троцифрених бројева дељивих са 23 има:
   А) 36; Б) 37; В) 38; Г) 39; Д) 40; Н) не знам.

5. Једно решење једначине $2\cdot 4^x+5^{x-\frac{1}{2}}=5^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$ припада скупу:
   А) $[0,\frac{9}{10})$; Б) $[\frac{6}{7},\frac{31}{21})$; В) $[\frac{25}{17},\frac{9}{5})$; Г) $[\frac{18}{7},\frac{13}{6})$; Д) $[\frac{20}{9},\frac{8}{3})$; Н) не знам.

6. Скуп решења неједначине $\log_x 3\cdot\log_{3x}3\cdot\log_3(81x)>1$ је:
   А) $[0,2)$; Б) $[0,9)$; В) $[\frac{1}{9},9)$; Г) $[\frac{1}{9},\frac{1}{3})$; Д) $(\frac{1}{9},\frac{1}{3})\cup(1,9)$; Н) не знам.

7. Уписан круг у правоугли троугао дели хипотенузу на делове 6 cm и 20 cm. Тада нумеричка вредност збира полупречника уписаног и описаног круга у тај троугао припада интервалу:
   А) $[13,14)$; Б) $[14,15)$; В)$[15,16)$; Г) $[17,18]$; Д) $[16,17)$; Н) не знам.

8. Решења x_1 и x_2 једначине $x^2-(a+2)x+a+1=0$ задовољавају услов $|x_1-x_2|<1$, ако и само ако $a\in(p,q)$. Тада је $6p+7q$:
   А) 1; Б) 2; В) 3; Г) 4; Д) 5; Н) не знам.

9. Обим осног пресека праве купе је 36 cm а површина купе је 144π cm^2. Запремина те купе једнака је (у cm^3) :

А) 64π;   Б) 144π;   В) 384π;   Г) 128π;   Д) 72π;   Н) не знам.

10. Број решења једначине $\cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x) = -\sqrt{2}$ на интервалу $(-2\pi, \frac{\pi}{4})$ је:

А) 6;   Б) 5;   В) 4;   Г) 8;   Д) 7;   Н) не знам.

11. Ако је $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ и $\cos\beta = -\frac{3}{5}$, $\in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, онда је $\sin(\alpha+\beta)$ једнако:

А) $\frac{48}{65}$;   Б) $\frac{63}{65}$;   В) $\frac{33}{65}$;   Г) $-\frac{63}{65}$;   Д) $-\frac{48}{65}$;   Н) не знам.

12. Збир свих рационалних сабирака у развоју $\left(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}\right)^8$ припадају интервалу:

А) $[0, 200)$;   Б) $[200, 400)$;   В) $[400, 600)$;   Г) $[600, 800)$;   Д) $[800, 1000)$;   Н) не знам.

13. Ако је $f(x+1) = x^2 + 5x$ и $f(x+2) + f(x+3) = ax^2 + bx + c$, онда је $a+b+c$ једнако:

А) 32;   Б) 38;   В) 30;   Г) 20;   Д) 14;   Н) не знам.

14. Збир апсолутних вредности координата тачке која је симетрична тачки $A(2,2)$ у односу на праву одређену тачкама $B(7,3)$ и $C(-1,-5)$ једнака је:

А) 7;   Б) 2;   В) 6;   Г) 4;   Д) 8;   Н) не знам.

15. У две посуде се налази укупно 80 литара воде. Ако се из једне преспе 20% воде у другу посуду, у обе посуде ће бити подједнака количина воде. Колика је на почетку разлика (у литрима)?

А) 10;   Б) 40;   В) 30;   Г) 24;   Д) 20;   Н) не знам.

Решење:

1. Сводећи делове израза на разломке добијамо низ једнакости

$$\left(\frac{2}{15} : \frac{50}{63} + \frac{10}{27} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{-2} + \left(\frac{5}{3}\right)^{-2}\right)^{-\frac{1}{3}} + 25^{-0,5} : 1,2 =$$
$$= \left(\frac{2}{15} \cdot \frac{63}{50} + \frac{10}{27} \cdot \frac{81}{25} + \frac{9}{25}\right)^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{25^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{10}{12} =$$
$$= \left(\frac{21}{125} + \frac{30}{25} + \frac{9}{25}\right)^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{5} \cdot \frac{10}{12} = \left(\frac{21+150+45}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{12} =$$
$$= \left(\frac{216}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1.$$

Тачан одговор је под **Б**.

2. Сређивањем израза у средњим заградама добијамо једнакости

$$\left[\frac{a}{b}\left(\frac{1}{b} - \frac{b^2}{a^3}\right)\right] : \left[\frac{1}{b^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2}\right] = \left[\frac{a}{b}\left(\frac{a^3-b^3}{a^3 b}\right)\right] : \left[\frac{a^2+ab+b^2}{a^2b^2}\right] =$$

$= \left[\frac{a^3-b^3}{b^2a^2}\right] \cdot \left[\frac{a^2b^2}{a^2+ab+b^2}\right] = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2} = \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^2+ab+b^2} = a-b.$
Тачан одговор је под **В.**

3. После факторисања именоца и бројиоца неједначина је еквивалентна неједначини $\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x+5)} \leq 0$. Добијена неједначина је еквивалентна неједначини $\frac{x-2}{x+5} \leq 0$ уз услов да $x \neq -1$. Одатле је скуп решења неједначине унија $(-5,-1) \cup (-1,2]$, па закључујемо да има 6 целобројних решења.

Тачан одговор је под **А**.

4. Први троцифрен број дељив са 23 је 112, а последњи можемо наћи тако што израчунамо $\frac{1000}{23} \in (43,44)$ па је последњи троцифрен број дељив са 23 и мањи од 1000 једнак $23 \cdot 43 = 989$. Можемо посматрати аритметички низ такав да је 115 његов први члан а да је разлика 23. Тако је n-ти члан аритметичке прогресије $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$, тј. у нашем случају важи једначина $989 = 115 + (n-1) \cdot 23$ што је еквивалентно $874 = (n-1) \cdot 23$ тј. $38 = n-1$. Решавањем једначине добијамо да је $n = 39$.

Тачан одговор је под **Г**.

5. Трансформишимо једначину еквивалентним трансформацијама:
$2 \cdot 4^x + 5^{x-\frac{1}{2}} = 5^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1} \Leftrightarrow 2 \cdot 4^x + 2^{2x-1} = 5^{x+\frac{1}{2}} - 5^{x-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2^{2x+1} + 2^{2x-1} = 5^{x+\frac{1}{2}} - 5^{x-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2^{2x}(2+\frac{1}{2}) = 5^x(5^{\frac{1}{2}} - 5^{-\frac{1}{2}}) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{5}{2} \cdot 2^{2x} = 5^x(\sqrt{5} - \frac{1}{\sqrt{5}}) \Leftrightarrow \frac{5}{2} \cdot 2^{2x} = 5^x \frac{4}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{4^x}{5^x} = \frac{8}{5\sqrt{5}} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^x = \frac{2^3}{\left(\sqrt{5}\right)^3}$
$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^3 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$
Тачан одговор је под **В**.

6. После трансформације израза са десне стране добијамо неједначину

$$\frac{1}{\log_3 x} \cdot \frac{1}{\log_3 3x} \cdot (\log_3 81 + \log_3 x) > 1$$

која је еквивалентна неједначини

$$\frac{1}{\log_3 x} \cdot \frac{1}{\log_3 3 + \log_3 x} \cdot (\log_3 3^4 + \log_3 x) > 1$$

тј. неједначини

$$\frac{1}{\log_3 x} \cdot \frac{1}{1 + \log_3 x} \cdot (4 + \log_3 x) > 1.$$

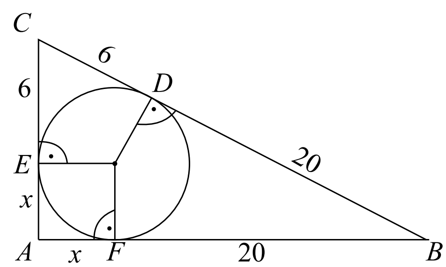
Увођењем смене $\log_3 x = t$ добијамо неједначину $\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{t+1} \cdot (t+4) > 1$ чијим сређивањем добијамо $\frac{t+4}{t(t+1)} > 1$ тј. $\frac{t+4}{t(t+1)} - 1 > 0$. Сређивањем претходне неједначине добијамо $\frac{t+4-t^2-t}{t(t+1)} > 0$ одакле следи $\frac{4-t^2}{t(t+1)} > 0$.

Растављањем бројиоца на факторе добијамо неједначину $\frac{(2-t)(2+t)}{t(t+1)} > 0$ чијим решавањем добијамо да је $t \in (-2, -1) \cup (0, 2)$ односно враћањем смене $x \in (\frac{1}{9}, \frac{1}{3}) \cup (1, 9)$.

Тачан одговор је под **Д**.

7. Нека су тачке у којима уписана кружница додирује странице троугла D, E и F. (сл. 74). На основу слике можемо приметити да важи да је $CF = CD = 6$, $BD = BF = 20$ и $AF = AE = x$. Одатле је $AB = x+20$, $AC = x+6$ и $BC = 26$. За троугао важи Питагорина теорема $AB^2 + AC^2 = BC^2$ тј. $(x+20)^2 + (x+6)^2 = 26^2$. Решавајући једначину добијамо два решења $x = -30$ и $x = 4$. Прво решење одбацујемо зато што је у питању негативни број. Одатле $x = 4$ представља и полупречник уписане кружнице. Полупречник описане кружнице је једнак половини хипотенузе тј. 13. Одатле је збир полупречинка описане и уписане кружнице једнак 17.

Тачан одговор је под **Г**.



Сл. 74:

8. Услов $|x_1 - x_2| < 1$ је еквивалентан услову $-1 < x_1 - x_2 < 1$ а одатле важе следеће еквиваленције:

$$\begin{aligned} -1 < x_1 - x_2 < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad -1 < \frac{\sqrt{(-(a+2))^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a+1)}}{1} < 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad -1 < \sqrt{a^2 + 4a + 4 - 4a - 4} < 1 \Leftrightarrow -1 < \sqrt{a^2} < 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad -1 < |a| < 1 \Leftrightarrow -1 < a < 1. \end{aligned}$$

То значи да је $p = -1$ и $q = 1$, па је $6p + 7q = 1$.

Тачан одговор је под **А**.

9. Обим осног пресека праве купе је $2r + 2s = 36$ што је еквиалентно $r + s = 18$ cm а површина купе је $P = r(r+s)\pi$ $=144\pi$ cm^2. Одавде

следи да је $r \cdot 18 = 144$ тј. $r = 8$. Одатле закључујемо да је $s = 10$. За израчунавање запремине неопходно је израчунати висину. Висину проналазимо користећи Питагорину теорему $r^2 + H^2 = s^2$ тј. $8^2 + h^2 = 10^2$. Из претходне једначине добијамо да је $h^2 = 10^2 - 8^2 = 36$. Одатле је висина $H = 6$ cm, а запремина је $V = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot \pi \cdot 6 = 128\pi\,\mathrm{cm}^3$.

Тачан одговор је под **Г**.

10. Ако поделимо једначину са 2 добићемо еквивалентну једначину $\frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ тј. $\sin\frac{\pi}{6}\cos(2x) - \cos\frac{\pi}{6}\sin(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Израз са леве стране представља синус разлике два угла тј. $\sin(\frac{\pi}{6} - 2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Претходна једначина важи ако је $\frac{\pi}{6} - 2x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \vee \frac{\pi}{6} - 2x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, за $k \in \mathbb{Z}$. Одатле је $\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4} - 2k\pi = 2x \vee \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} - 2k\pi = 2x$, $k \in \mathbb{Z}$ што је еквивалентно $\frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{8} - k\pi = x \vee \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{8} - k\pi = x$, $k \in \mathbb{Z}$. Даљим сређивањем израза добијамо да је $\frac{11\pi}{24} - k\pi = x \vee \frac{5\pi}{24} - k\pi = x$, $k \in \mathbb{Z}$. Одавде непосредном провером видимо да је укупно 5 решења на датом интервалу $(-2\pi, \frac{\pi}{4})$.

Тачан одговор је под **Б**.

11. По формули $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, па одатле следи $\sin(\alpha+\beta) = \frac{5}{13}\left(-\frac{3}{5}\right) + \cos\alpha\sin\beta$. Треба одредити $\cos\alpha$ и $\sin\beta$. Користећи чињеницу да је $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ и да је $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ добијамо да важи да је $\cos\alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}$. Како је $\beta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, и $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$, одатле је $\sin\beta = -\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$. Одавде је $\sin(\alpha + \beta) = \frac{5}{13}\left(-\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{12}{13}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{-15+48}{65} = \frac{33}{65}$.

Тачан одговор је под **В**.

12. Користећи Њутнову биномну формулу добијамо да је општи члан је облика $\binom{8}{k}\left(\sqrt{2}\right)^{8-k}\left(\sqrt[3]{3}\right)^k$ па су рационални сабирци су они код којих је степен првог сабирка паран а степен другог дељив са 3. То значи да је, ако посматрамо последњи фактор $k \in \{0, 3, 6\}$, а ако посматрамо степен од $\sqrt{2}$, $8 - k \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Пресек та два скупа даје да је $k = 0$ или 6. Одавде је $\binom{8}{0}\left(\sqrt{2}\right)^{8-0}\left(\sqrt[3]{3}\right)^0 + \binom{8}{6}\left(\sqrt{2}\right)^{8-6}\left(\sqrt[3]{3}\right)^6 = 16 + 28 \cdot 2 \cdot 9 = 520$.

Тачан одговор је под **В**.

13. Ако уведемо смену $t = x + 1$ која је еквивалентна $x = t - 1$ добићемо да је $f(t) = (t-1)^2 + 5(t-1) = t^2 + 3t - 4$. Одавде је:

$$
\begin{aligned}
&f(x+2) + f(x+3) = \\
&\qquad = (x+2)^2 + 3(x+2) - 4 + (x+3)^2 + 3(x+3) - 4 =
\end{aligned}
$$

$$= x^2 + 4x + 4 + 3x + 6 - 4 + x^2 + 6x + 9 + 3x + 9 - 4 =$$
$$= 2x^2 + 16x + 20.$$

Тачан одговор је под **Б**.

14. Одредимо једначину праве која садржи тачке B и C, $\frac{y-3}{-5-3} = \frac{x-7}{-1-7}$, што након срeђивања даје једначину $y = x - 4$. Једначина нормале на ту праву која садржи тачку A је $n : y - y_1 = k(x - x_1)$, тј. $n : y - 2 = -1(x - 2)$ или $y = -x + 4$. Након тога тражимо пресек нормале и праве решавањем једначине $x - 4 = -x + 4$ која је еквивалентна $2x = 8$ тј. $x = 4$. Одатле је $y = -4 + 4 = 0$. Добијени пресек $A_1(4, 0)$ је средиште дужи од тачке A до њој симетричне тачке $A'(x.y)$. Како је $\frac{2+x}{2} = 4$ одатле је $x = 8 - 2 = 6$. На сличан начин израчунавамо другу координату тачке A': пошто је $\frac{2+y}{2} = 0$ одатле следи $y = 0 - 2 = -2$. Збир апсолутних вредности координата тачке која је симетрична тачки $A(2, 2)$ у односу на праву одређену тачкама $B(7, 3)$ и $C(-1, -5)$ једнака је 8.

Тачан одговор је под **Д**.

15. Нека је количина воде у посуди у којој има више воде означена са x, а количина воде у другој посуди означена са y. На основу поставке задатка важи да је $x + y = 80$. Из услова задатка видимо да се из посуде у којој има више воде узима 20% и пресипа у другу посуду и након тога количина воде у обе посуде је подједнака. То значи да је количина воде која се преноси 20% од x, тј. $\frac{20}{100} \cdot x$, што пишемо као $x - \frac{20}{100} \cdot x = y + \frac{20}{100} \cdot x$. Срeђивањем једначине добијамо $y = x - \frac{40}{100}x = \frac{60}{100}x = \frac{3}{5}x$. Добијену једнакост убацимо у први услов $x + y = 80$ па ћемо добити једначину $x + \frac{3}{5}x = 80$, која је еквивалентна $\frac{8}{5}x = 80$ тј. $x = 50$. Одавде следи да је у другој посуди било 30 литара воде, па је разлика била 20 литара.

Тачан одговор је под **Д**.

Пријемни испит 2013 - тест 2

1. Вредност израза $\left(\frac{1}{25}+0,01+\left(\frac{4}{21}:\frac{4}{105}\right)^{-1}\right)^{-0,5}+\sqrt{(-2)^2}$ је:

А) 4; Б) 2; В) 1; Г) 0; Д) 5; Н) не знам.

2. После сређивања израз $\left[2ab:\left(\frac{1}{a^2-ab+b^2}-\frac{1}{a^2+ab+b^2}\right)+a^2b^2\right]:(a^2+b^2)$, где је $ab\neq 0$, једнак је:

А) a^2-b^2; Б) a^2+b^2; В) $a+b$; Г) $a-b$; Д) $\frac{1}{a+b}$; Н) не знам.

3. Решења неједначине $\frac{(x-2013)^2}{x-7}\leq 0$ која припадају скупу природних бројева ($x\in\mathbb{N}$) има:

А) 5; Б) 6; В) 7; Г) 8; Д) бесконачно много; Н) не знам.

4. Четврти и шести чланови растуће геометријске прогресије су $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{4}$. Осамнаести члан те прогресије је:

А) $\sqrt[3]{32}$; Б) $\sqrt{8}$; В) $\sqrt[4]{128}$; Г) $\sqrt[5]{256}$; Д) $\sqrt[6]{2048}$; Н) не знам.

5. Решење неједначине $4^{x+2}+1>5\cdot 2^{x+1}$ је подскуп скупа:

А)$(-\infty,3)\bigcup(4,\infty)$;; Б) $(-\infty,-4)\bigcup(-2,\infty)$; В) $(-\infty,1)\bigcup(3,\infty)$; Г) $(-\infty,2)\bigcup(4,\infty)$; Д) $(-\infty,-3)\bigcup(-1,\infty)$; Н) не знам.

6. Скуп решења неједначине $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-7x+12)>-1$ је:

А) $(2,5)$; Б) $(2,3)$; В) $(2,3)\bigcup(4,5)$; Г) $(3,4)$; Д) $(2,3)\bigcup(3,4)$; Н) не знам.

7. Површина прстена, део између описаног и уписаног круга једнакостраничног троугла странице a, је 4π cm^2. Тада је страница a (у cm):

А) 5; Б) 3,5; В)4,5; Г) 3; Д) 4; Н) не знам.

8. Реална решења x_1 и x_2 једначине $x^2+(a-4)x+a-2=0$ задовољавају услов $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\geq 1$, ако и само ако a припада скупу:

А) $(2,3]$; Б) $[6-2\sqrt{3},6+2\sqrt{3}]$; В) $[3,6+3\sqrt{2}]$; Г) $(2,6-2\sqrt{3}]$; Д) $(2,6+3\sqrt{2}]$; Н) не знам.

9. Површине дијагоналних пресека праве призме чија је основа ромб су 60 и $60\sqrt{3}$, а његова запремина је $180\sqrt{3}$. Површина призме једнака је:

А) $480+36\sqrt{3}$; Б) $240+72\sqrt{3}$; В) $240+36\sqrt{3}$; Г) $480+72\sqrt{3}$; Д) $360+72\sqrt{3}$; Н) не знам.

10. Број решења једначине $1-\cos x-3\sin^2 x=0$ на интервалу $(-\pi,2\pi]$ је:

А) 6;   Б) 5;   В) 4;   Г) 8;   Д) 7;   Н) не знам.

11. Ако су α и β оштри углови за које важи $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$ и $\sin\beta = \frac{1}{5\sqrt{2}}$, тада је $2\alpha + \beta$ једнако:

А) $45°$;   Б) $60°$;   В) $135°$;   Г) $120°$;   Д) $150°$;   Н) не знам.

12. Коефицијент уз x у развоју $\left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^{15}$ је:

А) 0;   Б) 1365;   В) 455;   Г) -455;   Д) -1365;   Н) не знам.

13. Решење неједначине $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geq 0$ је подскуп скупа:

А) $(1,\infty)$;   Б) $[-2,\infty)$;   В) $(-\infty,2]$;   Г) $[2,\infty)$;   Д) $\{-1,1,2\}$; Н) не знам.

14. Дате су тачке $A(1,3)$ и $B(5,-1)$. Апсциса пресека праве, која је нормална на дуж AB у тачки B, са x-осом једнака је:

А) 6;   Б) -4;   В) 4;   Г) 0;   Д) -6;   Н) не знам.

15. Суво грожђе садржи 8% воде, а свеже 77%. Колико треба свежег грожђа да се добије 200 kg сувог грожђа (у kg)?

А) 600;   Б) 750;   В) 650;   Г) 800;   Д) 700;   Н) не знам.

Решење:

1. Сређивањем израза добијамо:

$$\left(\frac{1}{25} + 0,01 + \left(\frac{4}{21} : \frac{4}{105}\right)^{-1}\right)^{-0,5} + \sqrt{(-2)^2} =$$
$$= \left(\frac{1}{25} + \frac{1}{100} + \left(\frac{4}{21} \cdot \frac{105}{4}\right)^{-1}\right)^{-0,5} + \sqrt{4} =$$
$$= \left(\frac{1}{25} + \frac{1}{100} + (5)^{-1}\right)^{-0,5} + 2 =$$
$$= \left(\frac{1}{25} + \frac{1}{100} + \frac{1}{5}\right)^{-0,5} + 2 =$$
$$= \left(\frac{4+1+20}{100}\right)^{-0,5} + 2 = \left(\frac{25}{100}\right)^{-0,5} + 2 = \left(\frac{1}{4}\right)^{-0,5} + 2 = 4^{\frac{1}{2}} + 2 = 4.$$

Тачан одговор је под **А**.

2. Сређивањем израза добијамо:

$$\left[2ab : \left(\frac{1}{a^2-ab+b^2} - \frac{1}{a^2+ab+b^2}\right) + a^2b^2\right] : (a^2+b^2) =$$
$$= \left[2ab : \left(\frac{\left(a^2+ab+b^2\right) - \left(a^2-ab+b^2\right)}{(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)}\right) + a^2b^2\right] : (a^2+b^2) =$$
$$= \left[2ab : \left(\frac{2ab}{\left(a^2+b^2\right)^2 - a^2b^2}\right) + a^2b^2\right] : (a^2+b^2) =$$
$$= \left[2ab \cdot \frac{\left(a^2+b^2\right)^2 - a^2b^2}{2ab} + a^2b^2\right] : (a^2+b^2) =$$

$= \left[(a^2+b^2)^2 - a^2b^2 + a^2b^2\right] : (a^2+b^2) =$

$= \left[(a^2+b^2)^2\right] : (a^2+b^2) = a^2+b^2$ где је $ab \neq 0$.

Тачан одговор је под **Б**.

3. Полазна неједначина је еквивалентна систему $x-7<0 \vee x=2013$ тј. $x<7 \vee x=2013$. Како x треба да буде природни број, скуп решења је $\{1,2,3,4,5,6,2013\}$.

Тачан одговор је под **В**.

4. Ако су четврти и шести чланови растуће геометријске прогресије $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{4}$, то значи да је $\sqrt{2} = a_4 = a_1q^3$ односно $\sqrt[3]{4} = a_6 = a_1q^5$. Одатле следи да је $\frac{a_6}{a_4} = \frac{a_1q^5}{a_1q^3} = q^2$, па је $q^2 = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[6]{4^2}}{\sqrt[6]{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{16}{8}} = \sqrt[6]{2}$. Из претходне једначине следи да је $q = \pm\sqrt[12]{2}$. Пошто је геометријска прогресија растућа, $q = \sqrt[12]{2}$. Сада одређујемо a_1 из чињенице да је $\sqrt{2} = a_1q^3 = a_1\left(\sqrt[12]{2}\right)^3$ тј. из $a_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[12]{2^3}} = \frac{\sqrt[12]{2^6}}{\sqrt[12]{2^3}} = \sqrt[12]{\frac{2^6}{2^3}} = \sqrt[12]{2^3} = \sqrt[4]{2}$. Осамнаести члан је $a_{18} = a_1q^{17} = \sqrt[4]{2}\cdot\left(\sqrt[12]{2}\right)^{18} = \sqrt[4]{2}\cdot\left(\sqrt[4]{2}\right)^6 = \sqrt[4]{128}$.

Тачан одговор је под **В**.

5. Полазна неједначина $4^{x+2}+1 > 5\cdot 2^{x+1}$ је еквивалентна неједначини $2^2\cdot(2^{x+1})^2+1 > 5\cdot 2^{x+1}$, коју решавамо увођењем смене $t = 2^{x+1}$. Увођењем наведене смене добијамо квадратну неједначину $4t^2-5t+1>0$ што је еквивалентно $t \in (-\infty, \frac{1}{4}) \cup (1,+\infty)$. Враћањем смене $t = 2^{x+1}$ добијамо да је $2^{x+1} \in (-\infty, \frac{1}{4}) \cup (1,+\infty)$ тј. $2^{x+1} < 2^{-2} \vee 2^{x+1} > 2^0$. Претходни систем неједначина је еквивалентан $x+1 < -2 \vee x+1 > 0$ тј. важи да је $x < -3 \vee x > -1$.

Тачан одговор је под **Д**.

6. Имајући у виду да је $\frac{1}{2}$ основа логаритма добијамо да важи

$\log_{\frac{1}{2}}(x^2-7x+12) > -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\log_{\frac{1}{2}}(x^2-7x+12) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \wedge x^2-7x+12>0\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [x^2-7x+12<2 \wedge x^2-7x+12>0] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [x^2-7x+10<0 \wedge x^2-7x+12>0] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [(x \in (2,5)) \wedge (x \in (-\infty,3)\cup(4,+\infty))] \Leftrightarrow x \in (2,3)\cup(4,5)$.

Тачан одговор је под **В**.

7. Пошто је за једнакостранични троугао полупречник описног круга $R = \frac{2}{3}h$, а полупречник уписаног круга $r = \frac{1}{3}h$, и $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ то је површина

прстена једнака $P = R^2\pi - r^2\pi = \frac{a^2}{3}\pi - \frac{a^2}{12}\pi = \frac{a^2}{4}\pi$. Како је по претпоставци задатка $P = 4\pi$ cm^2, одатле добијамо да је $a = 4$ cm.

Тачан одговор је под **Д**.

8. Решења x_1 и x_2 једначине $x^2+(a-4)x+a-2=0$ су реална ако и само ако је $(a-4)^2-4\cdot1\cdot(a-2)>0$. Претходна неједначина је еквивалентна $a^2-8a+16-4a+8\geq 0$ тј. $a^2-12a+24\geq 0$. Са друге стране, користећи Вијетове формуле $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{b}{c}$ где су a,b,c коефицијенти уз x^2, x, 1 у левом делу квадратне једначине $ax^2+bx+c=0$. Одатле добијамо да је $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{-a+4}{a-2}$, тј. неједначину $\frac{-a+4}{a-2}\geq 1$. Решавањем прве неједначине добијамо да $a\in(-\infty,6-2\sqrt{3}]\cup[6+2\sqrt{3},+\infty)$, а решавањем друге неједначине $a\in(2,3]$. Како је $6-2\sqrt{3}<3$, пресек добијена два скупа је $(2,6-2\sqrt{3}]$.

Тачан одговор је под **Г**.

9. Како су површине дијагоналних пресека праве призме чија је основа ромб 60 и $60\sqrt{3}$, то значи да је $d_1H=60$ и $d_2H=60\sqrt{3}$, где су d_1 и d_2 дијагонале ромба. Из формуле зазапремину $180\sqrt{3}=BH$. Пошто је основа ромб, површина основе је једнака $B=\frac{d_1d_2}{2}$ и важи да је $180\sqrt{3}=\frac{d_1d_2}{2}H$, одавде добијамо да је $180\sqrt{3}=d_1H\frac{d_2}{2}=d_2H\frac{d_1}{2}$, тј. две једначине $180\sqrt{3}=60\cdot\frac{d_2}{2}$ и $180\sqrt{3}=60\sqrt{3}\cdot\frac{d_1}{2}$ одакле добијамо да је $d_2=6\sqrt{3}$ а $d_1=6$, и $H=10$. Површина призме је $2B+M$. $B=\frac{d_1d_2}{2}=18\sqrt{3}$ а $M=4aH$. Како је $a=6$, површина призме је једнака $P=36\sqrt{3}+4\cdot6\cdot10=240+36\sqrt{3}$.

Тачан одговор је под **В**.

10. Ако изразимо синус преко косинуса добићемо да је полазна једначина еквивалентна $1-\cos x-3(1-\cos^2 x)=0$ тј. $-2-\cos x+3\cos=0$. Увођењем смене $\cos x=t$ добијамо квадратну једначину $3t^2-t-2=0$. Решења квадратне једначине су $t_1=-\frac{2}{3}$ и $t_2=1$. Када вратимо смену добијамо једначине облика $\cos x=t_1=-\frac{2}{3}$ и $\cos x=t_2=1$. Прва једначина има 3 решења, док друга на интервалу $(-\pi,2\pi]$ има 2 решења.

Тачан одговор је под **Б**.

11. Косинус збира израчунавамо као $\cos(2\alpha+\beta)=\cos2\alpha\cos\beta-$ $-\sin2\alpha\sin\beta$. Како је $\sin\beta=\frac{1}{5\sqrt{2}}$, важи да је $\cos\beta=\frac{7}{5\sqrt{2}}$. Са друге стране важи да је $\cos2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1-\frac{1}{9}}{1+\frac{1}{9}}=\frac{4}{5}$ и $\sin2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{9}}=\frac{3}{5}$. Одатле добијамо да је $\cos(2\alpha+\beta)=\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{5\sqrt{2}}-\frac{3}{5}\frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{25}{25\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Одавде добијамо да је $2\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

Тачан одговор је под **А**.

12. У развоју степена бинома $\left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^{15}$ општи члан је облика

$$\binom{15}{k}\left(x^3\right)^{15-k}\left(-\frac{1}{x}\right)^k.$$

После срећивања добијамо да је општи члан $(-1)^k\binom{15}{k}x^{45-4k}$. Да би добили да степен буде 1 неопходно је да $45 - 4k = 1$. Решавајући ту једначину добијамо да је $k = 11$, па је коефицијент $(-1)^{11}\binom{15}{11} = -1365$.

Тачан одговор је под **Д**.

13. Пошто квадратни корен увек даје позитивне резултате
$(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2-x-2 = 0 \vee ((x-1) \geq 0 \wedge x^2-x-2 > 0)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x = -1 \vee x = 2 \vee (x \geq 1 \wedge (x < -1 \vee x > 2)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \{-1\} \cup (2, +\infty)$.

Тачан одговор је под **Б**.

14. Једначина тражене праве p која садржи тачке A и B је облика $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ што је еквивалентно $\frac{y-3}{-1-3} = \frac{x-1}{5-1}$ тј. $y = -x+4$. Једначина нормале на праву p је облика $y - y_1 = k(x - x_1)$, тј. $y - (-1) = 1 \cdot (x-5)$ што је еквиваленто $y = x - 6$. Добијена нормала пресеца x-осу за $x = 6$, па је апсциса пресека 6. Тачан одговор је под **А**.

15. Ако свеже грожђе садржи 77% воде, то значи да у грожђу има 77% воде и 23% суве материје. Суво грожђе садржи 8% воде и 92% суве материје. То значи да у 200 kg сувог грожђа има $\frac{8}{100} \cdot 200 = 16$ kg воде и $\frac{92}{100} \cdot 200 = 184$ kg суве материје. Сада треба одредити колико је потребно свежег грожђа да би имали 184 kg суве материје. То добијамо из чињенице да у x kg свежег грожђа има $\frac{23}{100}x$ суве материје. Дакле, $\frac{23}{100}x = 184 \Leftrightarrow x = 184 \cdot \frac{100}{23} = 800$.

Тачан одговор је под **Г**.

Пријемни испит 2013 - тест 3

1. Вредност израза $\left(\frac{\left(\frac{1}{3}:0{,}5^3+\frac{2}{3}:5\frac{4}{5}-\frac{14}{29}\right)\cdot 17}{\left(1\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\right):(1+0{,}4^2)}\right)^{0{,}2}$ је:

А) $0,5$; Б) 1; В) 2; Г) 4; Д) 8; Н) не знам.

2. После сређивања израз $(a^2+b^2)^2 - 2b^4 - ab\cdot\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right) : \frac{1}{a^2+b^2}$, где је $ab \neq 0$, једнак је:

А) a^2-b^2; Б) $2a^2b^2$; В) ab; Г) a^2+b^2; Д) $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}$; Н) не знам.

3. Нека је скуп скуп решења неједначине $\frac{x^2-3x-10}{x^2+3x-4} \leq 0$. Тада је за неке реалне бројеве a, b, c, $d\,(a<b<c<d)$,скуп S облика:

А) $[a,b]\bigcup(c,d)$; Б) $(a,b]\bigcup[c,d)$; В) $[a,b)\bigcup(c,d]$; Г) $(a,b)\bigcup[c,d]$; Д) $(a,b]\bigcup(c,d]$; Н) не знам.

4. Бројеви $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ образују геометријски низ за који важи $a_5 - a_2 = 36$, $a_1 - a_4 = 18$. Збир првих једанаест чланова припада скупу:

А) $[1000,1300)$; Б) $[1900,2200)$; В) $[1600,1900)$; Г) $[1300,1600)$; Д) $[2200,2500)$; Н) не знам.

5.Број решења система $2^x+3^y=5$, $9^y+4^x=13$ је:

А) 0; Б) 1; В) 2; Г) 3; Д) 4; Н) не знам.

6. Ако је $\log_2 25 = a$, $\log_2 9 = b$ израчунати $\log_{15} 2$

А) $a+b$; Б) $\frac{2}{a+b}$; В) $a-b$; Г) $\frac{a+b}{2}$; Д) $\frac{1}{a+b}$; Н) не знам.

7. Бочне странице трапеза, у кога се може уписати круг полупречника 3 cm, су 7 cm и 11 cm. Тада је збир нумеричких вредности овршине и обима једнак:

А) 90; Б) 167; В)128; Г) 126; Д) 111; Н) не знам.

8. Одредити скуп вредности реалног параметра p тако да једначина $|x^2-2x-8|-p=0$ има више од два решења:

А) $[-2,4]$; Б) $(0,9]$; В) $[-2,-4)$; Г) $(9,\infty)$; Д) $[9,\infty)$; Н) не знам.

9. Површина осног пресека правог ваљка је 60 а површина ваљка је 78π. Запремина тог ваљка једнака је:

А) 90π; Б) $90\sqrt{2}\pi$; В) $240\sqrt{3}\pi$; Г) 144π; Д) $144\sqrt{2}\pi$; Н) не знам.

10. Број решења једначине $\sin x = \cos\frac{x}{2}$ на интервалу $(-2\pi, 5\pi)$ је:

А) 6; Б) 5; В) 4; Г) 3; Д) 7; Н) не знам.

11. Вредност израза $\sin 18° \cdot \sin 54°$ је:

А) $\frac{1}{2}$; Б) $\frac{1}{4}$; В) $\frac{3}{4}$; Г) $\frac{3}{8}$; Д) $\frac{5}{8}$; Н) не знам.

12. Број ирационалних сабирака у развоју $\left(\sqrt{5}+\sqrt[3]{2}\right)^{2013}$ је:

А) 1674; Б) 1675; В) 1676; Г) 1677; Д) 1678; Н) не знам.

13. Количник збира свих нула полинома и производа свих нула полинома $P(x) = 2x^3 - 12x^2 + 22x - 12$ једнак је:

А) 6; Б) -6; В) -1; Г) 1; Д) $\frac{1}{6}$; Н) не знам.

14. Збир координата центра кружнице која се налази у првом квадранту, која додирује праве $y = x+1$ и $y = 3x+1$, и садржи тачку $A(3,4)$ једнак је:

А) $6\sqrt{5}-11$; Б) $9\sqrt{5}$; В) $18\sqrt{5}$; Г) $11-6\sqrt{5}$; Д) 7; Н) не знам.

15. Збир решења једначине $2z + 5\overline{z} - z\overline{z} = 1 + 9i$ једнак је ?

А) $7-6i$; Б) $2-3i$; В) $-2+3i$; Г) 0; Д) $4-8i$; Н) не знам.

Решење:

1. Сређивањем израза добијамо:

$$\left(\frac{\left(\frac{1}{3}:0{,}5^3+\frac{2}{3}:5\frac{4}{5}-\frac{14}{29}\right)\cdot 17}{\left(1\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\right):(1+0{,}4^2)}\right)^{0,2} = \left(\frac{\left(\frac{1}{3}:\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{2}{3}:\frac{29}{5}-\frac{14}{29}\right)\cdot 17}{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{12}\right):\left(1+\left(\frac{2}{5}\right)^2\right)}\right)^{0,2} =$$
$$= \left(\frac{\left(\frac{1}{3}\cdot 2^3+\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{29}-\frac{14}{29}\right)\cdot 17}{\left(\frac{18}{12}-\frac{1}{12}\right):\left(1+\frac{4}{25}\right)}\right)^{0,2} = \left(\frac{\left(\frac{8}{3}+\frac{10}{87}-\frac{14}{29}\right)\cdot 17}{\frac{17}{12}\cdot\frac{25}{29}}\right)^{0,2} = \left(\frac{\left(\frac{8\cdot 29+10-14\cdot 3}{87}\right)\cdot 17}{\frac{17}{12}\cdot\frac{25}{29}}\right)^{0,2} =$$
$$= \left(\frac{\frac{200}{87}\cdot 17}{\frac{17}{12}\cdot\frac{25}{29}}\right)^{0,2} = \left(\frac{\frac{200}{3}\cdot 17}{\frac{17}{12}\cdot\frac{25}{1}}\right)^{0,2} = \left(\frac{\frac{200}{3}\cdot 17}{\frac{17}{12}\cdot 25}\right)^{0,2} = \left(\frac{200\cdot 17}{\frac{17}{4}\cdot 25}\right)^{0,2} = \left(\frac{200\cdot 1}{\frac{1}{4}\cdot 25}\right)^{0,2} =$$
$$= \left(\frac{800}{25}\right)^{0,2} = (32)^{0,2} = 2.$$

Тачан одговор је под **В**.

2. Сређивањем израза добијамо:

$$\left(a^2+b^2\right)^2 - 2b^4 - ab\cdot\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right) : \frac{1}{a^2+b^2} =$$
$$= a^4 + 2a^2b^2 - b^4 - ab\cdot\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)\cdot(a^2+b^2) =$$
$$= a^4 + 2a^2b^2 - b^4 - (a^4-b^4) = 2a^2b^2.$$

Тачан одговор је под **Б**.

3. Факторисањем имениоца и бројиоца добијамо еквивалентну неједначину $\frac{(x-5)(x+2)}{(x-1)(x+4)} \le 0$. Решење неједначине је $(-4,-2] \cup (1,5]$.

Тачан одговор је под **Д**.

4. Ако бројеви $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ образују геометријски низ, онда је општи члан $a_n = a_1 q^{n-1}$. Из услова $a_5 - a_2 = a_1 q^4 - a_1 q = 36$, $a_1 - a_1 q^3 = 18$. Одавде је $a_1 q(q^3 - 1) = 36$ и $a_1(1 - q^3) = 18$. Одавде је $a_1 = \frac{18}{1-q^3}$ па је $\frac{18}{1-q^3} q(q^3 - 1) = 36$ што је еквиалентно $-18q = 36$, па је $q = -2$ и $a_1 = 2$. Збир првих једнаест чланова је

$2 + 2 \cdot (-2) + 2 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2)^3 + \cdots + 2 \cdot (-2)^{10} =$

$= 2 \cdot \frac{1-(-2)^{11}}{1-(-2)} = 2 \cdot \frac{1+2^{11}}{1+2} = 2\frac{1+2048}{3} = \frac{2+4096}{3} = \frac{4098}{3} = 1366.$

Тачан одговор је под **Г**.

5. Систем $2^x + 3^y = 5$, $9^y + 4^x = 13$ увођењем смена $2^x = u$, $3^y = v$ постаје систем $u + v = 5$, $v^2 + u^2 = 13$. Ако у првој једначини изразимо u преко v и то уврстимо у другој једначини добићемо квадратну једначину $v^2 + (5-v)^2 = 13 \Leftrightarrow 2v^2 - 10v + 12 = 0 \Leftrightarrow v^2 - 5v + 6 = 0$ чија су решења $v = 2$ и $v = 3$. Одатле добијамо да је $u = 3$ или 2. Враћањем смене добијамо да су решења система $\begin{cases} 2^x = 3 \\ 3^y = 2 \end{cases}$ или $\begin{cases} 2^x = 2 \\ 3^y = 3 \end{cases}$. Одавде видимо да постоје два решења система: $(\log_2 3, \log_3 2)$ односно $(1, 1)$.

Тачан одговор је под **В**.

6. Ако је $\log_2 25 = a$, $\log_2 9 = b$ тада је $\log_2 5^2 = 2\log_2 5 = a$ одакле следи $\log_2 5 = \frac{a}{2}$. Слично томе је $\log_2 3 = \frac{b}{2}$. Задатак је да израчунамо $\log_{15} 2$. Како је $\log_{15} 2 = \frac{1}{\log_2 15} = \frac{1}{\log_2(3 \cdot 5)} = \frac{1}{\log_2 3 + \log_2 5} = \frac{1}{\frac{b}{2} + \frac{a}{2}} = \frac{2}{a+b}$.

Тачан одговор је под **Б**.

7. На основу слике 75 добијамо да је $a + d = 7$ и $b + c = 11$ користећи чињеницу да две тангенте из исте тачке на круг образују једнакокраки троугао. Обим је једнак

$$d + c + c + b + b + a + a + d = 2(a + b + c + d) = 2(7 + 11) = 2 \cdot 18 = 36.$$

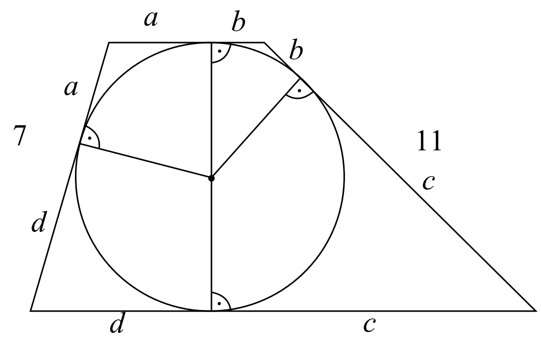
Површина $P = m \cdot h$. Висина је $h = 3 + 3 = 6$. Медијана

$$m = \frac{(d + c) + (a + b)}{2} = \frac{18}{2} = 9,$$

па је површина $P = 6 \cdot 9 = 54$. Тражени збир је $36 + 54 = 90$.

Тачан одговор је под **А**.

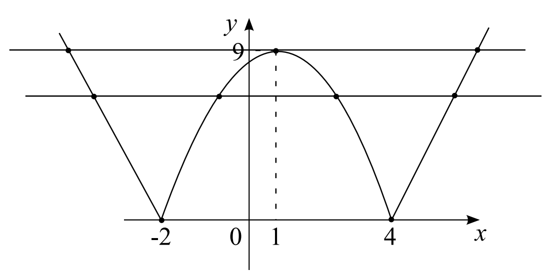
8. Задатак можемо решити графички тако што посматрамо графике функција $y_1 = |x^2 - 2x - 8|$ и $y_2 = p$, где је $y_1 = y_2$. Са слике видимо да



Сл. 75:

више од два решења добијамо за $p \in (0, a]$. Потребно је одредити a које заправо представља апсолутну вредност минумума квадратне функције (теме параболе). Како је у питању парабола $y_1 = x^2 - 2x - 8$, x-координату њеног темена налазимо по формули $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1$. Одавде теме параволе T има координате $T(1, -9)$, па је $a = 9$.

Тачан одговор је под **Б**.



Сл. 76:

9. Површина осног пресека правог ваљка једнака је $P_o = 2r \cdot H$ па је $P_o = 2r \cdot H = 60$, а површина ваљка се рачуна по формули $P = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot H$ па је $2r^2\pi + 2r\pi \cdot H = 78\pi$. Из површине осногог пресека множењем са π добијамо $2r\pi H = 60\pi$. Из формуле за површину ваљка добијамо да је $78\pi = 2r^2\pi + 60\pi \Leftrightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$, а одавде је $H = 10$. Запремина тог ваљка једнака је $V = r^2\pi H = 90\pi$.

Тачан одговор је под **А**.

10. Израз са леве стране једнакости представљамо као синус двоструког угла па добијамо $\sin 2 \cdot \frac{x}{2} = 2 \sin\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2} = \cos\frac{x}{2}$ што је еквивалентно

једначини $\cos\frac{x}{2}(2\sin\frac{x}{2}-1)=0$ тј. $\cos\frac{x}{2}=0 \vee \sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$. Прва једначина је еквивалентна $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ тј. $x=\pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ и има 3 решења, а друга је еквивалентна $\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$ однсно $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee \frac{5\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ па $x=\frac{\pi}{3}+4k\pi \vee \frac{5\pi}{3}+4k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ има 3 решења на интервалу $(-2\pi,5\pi)$.

Тачан одговор је под **А**.

11. Прво ћемо израчунати $\sin 18^\circ$ тако што ћемо кренути од једнакости $\sin 54^\circ=\cos 36^\circ$ што је еквивалентно $\sin 3\cdot 18^\circ=\cos 2\cdot 18^\circ$. Коришћењем формула за синус и косинус збира углова добијамо

$$\begin{aligned}
&-4\sin^3 18^\circ+3\sin 18^\circ=1-2\sin^2 18^\circ\Leftrightarrow\\
&\quad\Leftrightarrow -4\sin^3 18^\circ+3\sin 18^\circ+\sin^2 18^\circ=1-\sin^2 18^\circ\Leftrightarrow\\
&\quad\Leftrightarrow \sin 18^\circ(\sin 18^\circ-1)(4\sin 18^\circ-3)=(1-\sin 18^\circ)(1+\sin 18^\circ)\Leftrightarrow\\
&\quad\Leftrightarrow \sin 18^\circ(3-4\sin 18^\circ)=1+\sin 18^\circ.
\end{aligned}$$

Увођењем смене $t=\sin 18^\circ$ добијамо квадратну једначину чија су решења $t=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ и $t=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Прво решење одбацујемо зато што је реч у првом квадранту па синус не може бити негативан. Одавде је $\sin 18^\circ=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Користећи овај резултат можемо да израчунамо $\sin 3\cdot 18^\circ\cdot\sin 18^\circ$. Крајњи резултат је $\frac{1}{4}$.

Тачан одговор је под **Б**.

12. Користећи Њутнову биномну формулу важи да је општи члан облика $\binom{2013}{k}\left(\sqrt{5}\right)^{2013-k}\left(\sqrt[3]{2}\right)^k=\binom{2013}{k}5^{\frac{2013-k}{2}}2^{\frac{k}{3}}$. Израчунајмо прво број рационалних сабирака. То су сабирци код којих је $2013-k$ дељиво са 2, и да је k дељиво са 3. Из првог видимо да k треба да буде непарно и да је k дељиво са 3. То су бројеви 3, 9, 15, 21,... . Видимо да је 2013 непаран и дељив са 3 па је то уједно и последње k који задовољава услове. То значи да је $3+6\cdot(n-1)=2013$ што је еквивалентно $6(n-1)=2010$ тј. $6(n-1)=2010$. Из претходне једначине добијамо $n-1=335$ тј. $n=336$. Како је 336 рационалних сабирака, то је $2014-336=1678$ ирационалних.

Тачан одговор је под **Д**.

13. Нека су x_1, x_2 и x_3 нуле полинома. Користећи Вијетове формуле важи да је $x_1+x_2+x_3=-\frac{-12}{2}=6$ и $x_1x_2x_3=-\frac{-12}{2}=6$, па одатле следи да је $\frac{x_1+x_2+x_3}{x_1x_2x_3}=\frac{6}{6}=1$.

Тачан одговор је под **Г**.

14. Приметимо да тачка A припада првој правој, што значи да она представља тачку додира тангенте и кружнице. Одатле је једначина тангенте на кружницу кроз ту тачку $(x-p)(3-p)+(y-q)(4-q)=r^2$.

Добијена једначина је еквивалентна $(y-q)(4-q)=r^2-(x-p)(3-p)$ тј. $y-q=\frac{r^2}{4-q}-\frac{(x-p)(3-p)}{4-q}$, што је еквивалентно $y=q+\frac{r^2}{4-q}-\frac{(x-p)(3-p)}{4-q}$. Претходна једначина је еквивалентна $y=q+\frac{r^2}{4-q}-x\cdot\frac{3-p}{4-q}+\frac{p(3-p)}{4-q}$. Како је тангента истовремено права $y=x+1$ мора да важи $\frac{3-p}{4-q}=-1$, одакле добијамо да је $q=7-p \Leftrightarrow p+q=7$.

Тачан одговор је под **Д**.

15. Ако непознату запишемо у алгебарском облику $z=x+iy$ добићемо еквивалентну једначину $2(x+iy)+5(x-iy)-(x+iy)(x-iy)=1+9i$ тј. $2x+2yi+5x-i5y-x^2-y^2=1+9i$. Након сређивања добијамо једначину$(-x^2+7x-y^2)-3yi=1+9i$. Добијена једначина је еквивалентна систему $-x^2+7x-y^2=1$, $-3y=9$. Из друге једначине добијамо $y=-3$. Уврштавањем у прву једначину добијамо квадратну једначину $-x^2+7x-9=1$ чија су решења $x_1=2$ и $x_1=5$, па су добијена решења $z_1=2-3i$ и $z_2=5-3i$ а њихов збир је $7-6i$.

Тачан одговор је под **А**.

Пријемни испит 2013 - тест 4

1. Вредност израза $12 \cdot \left(\frac{5}{\sqrt{10}-2} + \frac{2}{\sqrt{10}+5} - \frac{7}{\sqrt{10}}\right)$ је:
   А) $3\sqrt{5}$; Б) 14; В) 28; Г) $4\sqrt{2}$; Д) $8\sqrt{10}$; Н) не знам.

2. После сређивања израз $\left[\frac{(a+b)^3-(a-b)^3+4b^3}{6b} + 2ab\right] \cdot \frac{1}{a+b}$, где је $b \neq 0$ и $a+b \neq 0$, једнак је:
   А) a^2+b^2; Б) $a-b$; В) $\frac{1}{ab}$; Г) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$; Д) $a+b$; Н) не знам.

3. Нека је скуп S скуп решења неједначине $\frac{x^2-8x+7}{x^2-5x+6} \leq 0$. Тада је за неке реалне бројеве a, b, c, d $(a<b<c<d)$, скуп S облика:
   А) $[a,b) \cup (c,d]$; Б) $(a,b] \cup [c,d)$; В) $[a,b] \cup (c,d)$; Г) $(a,b) \cup [c,d]$; Д) $(a,b] \cup (c,d]$; Н) не знам.

4. Вредност израза $i^5+i^6+i^7+...+i^{2012}+i^{2013}$ једнак је:
   А) $1+i$; Б) i; В) -1; Г) 0; Д) $1-i$; Н) не знам.

5. Збир решења једначине $2^{\frac{2}{x}-1} - 33 \cdot 2^{\frac{1}{x}-3} + 1 = 0$ припада интервалу:
   А) $[-\frac{4}{3}, -\frac{9}{10})$; Б) $[-\frac{5}{6}, -\frac{3}{8})$; В) $[-\frac{3}{8}, \frac{3}{8})$; Г) $[\frac{3}{8}, \frac{5}{6})$; Д) $[\frac{8}{9}, \frac{4}{3})$; Н) не знам.

6. Производ решења једначине $x^{\frac{\log_2 x+5}{3}} = 2^{5+\log_2 x}$ једнак је:
   А) $\frac{1}{4}$; Б) 2; В) 1; Г) $\frac{1}{2}$; Д) 4; Н) не знам.

7. Унутрашњи угао правилног n-тоугла је $157°30'$. Тада је број дијагонала тог n-тоугла једнак:
   А) 90; Б) 77; В) 135; Г) 104; Д) 119; Н) не знам.

8. Одредити параметар a тако да решења једначине $x^2+(a-3)x+a=0$ буду позитивна и различита. Тада a припада скупу:
   А) $(0,3)$; Б) $(0,1)$; В) $(-\infty,1) \cup (9,\infty)$; Г) $(9,\infty)$; Д) $(0,1) \cup (9,\infty)$; Н) не знам.

9. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Ако је запремина пирамиде $ABDS$, где је S средиште стране BCC_1B_1, једнака $\frac{9}{4}$. Колика је површина коцке?
   А) 72; Б) 48; В) 24; Г) 54; Д) 30; Н) не знам.

10. Број решења једначине $\frac{1-\cos(8x)}{\sin(4x)} = 0$ на интервалу $(0, 2\pi]$ је:
    А) 0; Б) 9; В) бесконачно много; Г) 7; Д) 8; Н) не знам.

11. Вредност израза $\frac{\sin 250° + 2\cos 320°}{\sin 1100°}$ је:
    А) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; Б) $2\sqrt{3}$; В) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; Г) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; Д) $\sqrt{3}$; Н) не знам.

12. Број рационалних сабирака у развоју $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)^{2013}$ је:

А) 333; Б) 334; В) 335; Г) 336; Д) 337; Н) не знам.

13. Збир решења једначине $\frac{(x+1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{\log\left|\frac{x}{2}-1\right|}=0$ једнак је:

А) 11; Б) 13; В) 7; Г) 8; Д) 14; Н) не знам.

14. Збир координата тачке на елипси $2x^2+4y^2=18$ која је најближа правој $x+4y=2013$, једнак је:

А) 2013; Б) 3; В) 6; Г) $\frac{27}{2}$; Д) $\frac{10}{3}$; Н) не знам.

15. Кошуља је поскупела прво за 20%, а након 16 дана, појефтинила за 20%. Шта је тачно?

А) цена је остала иста; Б) поскупела је за 16%;
В) појефтинила је за 16%; Г) поскупела је за 4%;
Д) појефтинила је за 4%; Н) не знам.

Решење:

1. Рационалисањем и сређивањем израза добијамо једнакости

$$12\cdot\left(\frac{5}{\sqrt{10}-2}+\frac{2}{\sqrt{10}+5}-\frac{7}{\sqrt{10}}\right)=$$
$$=12\cdot\left(\frac{5}{\sqrt{10}-2}\cdot\frac{\sqrt{10}+2}{\sqrt{10}+2}+\frac{2}{\sqrt{10}+5}\cdot\frac{\sqrt{10}-5}{\sqrt{10}-5}-\frac{7}{\sqrt{10}}\cdot\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}\right)=$$
$$=12\cdot\left(\frac{5(\sqrt{10}+2)}{10-4}+\frac{2(\sqrt{10}-5)}{10-25}-\frac{7\sqrt{10}}{10}\right)=$$
$$=12\cdot\left(\frac{5\sqrt{10}+10}{6}+\frac{2\sqrt{10}-10}{-15}-\frac{7\sqrt{10}}{10}\right)=$$
$$=10\sqrt{10}+20-\frac{50\sqrt{10}-40}{5}=$$
$$=10\sqrt{10}+20-10\sqrt{10}+8=28.$$

Тачан одговор је под **В**.

2. Кубирањем бинома и сређивањем израза добијамо једнакости

$$\left[\frac{(a+b)^3-(a-b)^3+4b^3}{6b}+2ab\right]\cdot\frac{1}{a+b}=$$
$$=\left[\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)+4b^3}{6b}+2ab\right]\cdot\frac{1}{a+b}=$$
$$=\left[\frac{6a^2b+2b^3+4b^3}{6b}+2ab\right]\cdot\frac{1}{a+b}=$$
$$=[a^2+b^2+2ab]\cdot\frac{1}{a+b}=$$
$$=[a+b]^2\cdot\frac{1}{a+b}=a+b.$$

Тачан одговор је под **Д**.

3. Решимо неједначину $\frac{x^2-8x+7}{x^2-5x+6} \leq 0$ тако што ћемо одредити знак имениоца и бројиоца. Решење неједначине $x^2-8x+7 \leq 0$ је еквивалентно неједначини $(x-7)(x-1) \leq 0$ чија су решења $x \in [1,7]$. Знак имениоца одређујемо на сличан начин: неједначина $x^2-5x+6 \leq 0$ је еквивалентна $(x-5)(x-1) \leq 0$ чија су решења $x \in [2,3]$. Ове податке можемо ставити у таблицу

		1		2		3		7	
x^2-8x+7	+	0	-	-	-	-	-	0	+
x^2-5x+6	+	+	+	0	+	0	+		+
$\frac{x^2-8x+7}{x^2-5x+6}$	+	0	-	недеф	-	недеф	-	0	+

и одавде закључујемо да је $x \in [1,2) \cup (3,7]$.

Тачан одговор је под **А**.

4. Израз можемо рационализовати па ћемо добити:
$i^5+i^6+i^7+...+i^{2012}+i^{2013}=$
$=i^5(1+i^1+i^2+...+i^{2007}+i^{2008})=$
$=i\cdot(1+i^1+i^2+i^3+i^4+...+i^{2007}+i^{2008})$.

Збир четри узастопна сабирка је $1+i^1+i^2+i^3=0$, збир друга четри сабирка је $i^4+i^5+i^6+i^7=0$,..., $i^{2004}+i^{2005}+i^{2006}+i^{2007}=0$. Одавде $i^5+i^6+i^7+...+i^{2012}+i^{2013}=i\cdot i^{502\cdot 4}=i\cdot 1=i$.

Тачан одговор је под **Б**.

5. Једначину $2^{\frac{2}{x}-1}-33\cdot 2^{\frac{1}{x}-3}+1=0$ решавамо увођењем смене $2^{\frac{1}{x}}=t$ чиме добијамо квадратну једначину $\frac{1}{2}t^2-33\cdot t\cdot 2^{-3}+1=0$ која је еквивалентна $\frac{t^2}{2}-\frac{33}{8}\cdot t+1=0$ тј. $t^2-\frac{33}{4}\cdot t+2=0$. Решења претходне једначине су

$$t=\frac{\frac{33}{4}\pm\sqrt{\left(\frac{33}{4}\right)^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2}=\frac{\frac{33}{4}\pm\sqrt{\frac{1089}{16}-\frac{128}{16}}}{2}=\frac{\frac{33}{4}\pm\sqrt{\frac{1089}{16}-\frac{128}{16}}}{2}=\frac{\frac{33}{4}\pm\sqrt{\frac{961}{16}}}{2}=\frac{\frac{33}{4}\pm\frac{31}{4}}{2},$$

па је $t=8 \vee t=\frac{1}{4}$. Враћањем смене добијамо једначине $2^{\frac{1}{x}}=8=2^3$ и $2^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{4}=2^{-2}$, чија су решења $\frac{1}{x}=3$ и $\frac{1}{x}=-2$, тј. $x_1=\frac{1}{3}$ или $x_2=-\frac{1}{2}$ па је њихов збир $x_1+x_2=-\frac{1}{6}$.

Тачан одговор је под **В**.

6. Ако једначину логаритмујемо логаритмом са основом 2 добићемо једначину $\log_2 x^{\frac{\log_2 x+5}{3}}=\log_2 2^{5+\log_2 x}$ која је еквивалентна једначини $\frac{\log_2 x+5}{3}\log_2 x=5+\log_2 x$. Увођењем смене $\log_2 x=t$ добијамо квадратну једначину $\frac{t+5}{3}t=5+t$ која је еквивалентна $(t+5)(\frac{t}{3}-1)=0$ чија су

решења $t=-5$ и $t=3$. Враћањем смене добијамо да је $\log_2 x=-5$ или $\log_2 x=3$, тј. $x=\frac{1}{32}$ и $x=8$. а њихов производ је $\frac{1}{4}$.

Тачан одговор је под **А**.

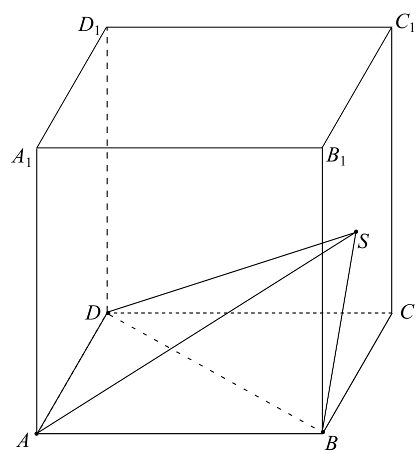
7. Унутрашњи угао правилног n-тоугла је $\frac{(n-2)180^\circ}{n}=157^\circ 30'$ што је еквивалентно $(n-2)180=n157,5$ тј. $80n-n157,5=360$. Из претходне једначине добијамо $22,5n=360$ тј. $n=\frac{360}{22,5}=16$. Број дијагонала израчунавамо по формули $D_n=\frac{n(n-3)}{2}=\frac{16\cdot 13}{2}=104$.

Тачан одговор је под **Г**.

8. Решења су позитивна ако и само ако су њихов производ и збир позитивни. Да би била различита решења, неопходно је да дискриманта буде већа од нуле. Нека су x_1 и x_2 решења, тада користећи Вијетове формуле мора да важи $x_1+x_2=-\frac{a-3}{1}>0$ и $x_1\cdot x_2=\frac{a}{1}>0$. Дискриминанта је $D=(a-3)^2-4a=a^2-10a+9>0 \Leftrightarrow a<1\vee a>9$. Пресеком добијамо $a\in(0,1)$.

Тачан одговор је под **Б**.

9. Пирамида $ABDS$ (сл. 77) има запремину $V=\frac{1}{3}P_{\triangle ABD}H_S$ где је $P_{\triangle ABD}=\frac{a^2}{2}$ и $H_S=\frac{a}{2}$. Запремина је $V=\frac{1}{3}\frac{a^2}{2}\frac{a}{2}=\frac{a^3}{12}=\frac{9}{4}$ па је $a=3$. Површина коцке је једнака $P=6a^2=6\cdot 3^2=54$.



Сл. 77:

Тачан одговор је под **Г**.

10. Једначина $\frac{1-\cos(8x)}{\sin(4x)}=0$ је еквивалентна систему једначина $1-\cos(8x)=0\wedge\sin(4x)\neq 0$. Из прве једначине добијамо $\cos(8x)=1$,

тј. $8x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$. На задатом интервалу је $x \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{6\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{8\pi}{4}\}$. Из друге једначине провером одбацујемо сва решења.

Тачан одговор је под **А**.

11. Користећи формуле за синус и косинус збира и разлике добијамо једнакости:

$$\frac{\sin 250^\circ + 2\cos 320^\circ}{\sin 1100^\circ} = \frac{\sin 250^\circ + 2\cos 320^\circ}{\sin(20^\circ + 1080^\circ)} =$$
$$= \frac{\sin(180^\circ + 70^\circ) + 2\cos(360^\circ - 40^\circ)}{\sin 20^\circ} = \frac{-\cos 20^\circ + 2\cos(60^\circ - 20^\circ)}{\sin 20^\circ} =$$
$$= \frac{-\cos 20^\circ + 2(\cos 60^\circ \cos 20^\circ + \sin 60^\circ \sin 20^\circ)}{\sin 20^\circ} =$$
$$= \frac{-\cos 20^\circ + 2\left(\frac{1}{2}\cos 20^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20^\circ\right)}{\sin 20^\circ} = \frac{\sqrt{3}\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \sqrt{3}.$$

Тачан одговор је под **Д**.

12. Сабирци у развоју бинома су према Њутновој биномној формули облика $\binom{2013}{k}\left(\sqrt{2}\right)^{2013-k}\left(\sqrt[3]{3}\right)^{k}$. Одатле је сабирак рационалан ако је $2013 - k$ дељиво са 2 и k дељиво са 3. Пошто је 2013 непарно онда и k мора бити непарно. Како k мора бити истовремено дељиво са 3 то су онда бројеви 3,9,15,21,...,2013. Пошто је у питању аритметичка прогресија где је $a_1 = 3$ и $d = 6$, следи да је $2013 = 3 + (n-1)d = 3 + (n-1)6$. Одавде је $2010 = 6(n-1) \Leftrightarrow 335 = n - 1 \Leftrightarrow n = 336$.

Тачан одговор је под **Г**.

13. Да би реалан број био решење дате једначине неопходно је да буде нула бројиоца а да истовремено не буде нула имениоца и да је именилац дефинисан. Нуле бројиоца су -1,2,3,4,5. Провером у имениоцу одбацујемо 2 и 4, па је збир решења једначине $-1 + 3 + 5 = 7$.

Тачан одговор је под **В**.

14. Услов да права $y = kx + n$ буде тангента елипсе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ је $a^2k^2 + b^2 = n^2$. Елипса дата у задатку је $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{\frac{9}{2}} = 1$, па је $a = 3$ и $b = \frac{3}{\sqrt{2}}$. Пронађимо тангенту на елипсу која је паралелна датој правој. Тачка додира тангенте и елипсе је тражена тачка. Права паралелна датој је облика
$y = -\frac{1}{4}x + n$. Одавде добијамо да је $k = -\frac{1}{4}$ а из услова додира важи да је $9\frac{1}{16} + \frac{9}{2} = n^2$ што је еквиваелентно $\frac{81}{16} = n^2$ тј. $n = \pm\frac{9}{4}$, па су кандидати за тражену тангенту $y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$ и $y = -\frac{1}{4}x - \frac{9}{4}$. Тангента која је ближа правој $y = -\frac{1}{4}x + \frac{2013}{4}$ је $y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$. Одредимо сада тачку додира из једначине $2x^2 + 4(-\frac{1}{4}x + \frac{9}{4})^2 = 18$ која је еквивалентна

$2x^2+4(\frac{1}{16}x^2-2\frac{1}{4}x\frac{9}{4}+\frac{81}{16})=18$ тј. $2x^2+\frac{x^2}{4}-\frac{9}{2}x+\frac{81}{4}=18$. Сређивањем еквивалентне квадратне једначине $\frac{9}{4}x^2-\frac{9}{2}x+\frac{9}{4}=0$ добијамо $x^2-2x+1=0$ чије је решење$x=1$, а из једначине праве је $y=-\frac{1}{4}+\frac{9}{4}=2$. Па су координате тачке $(1,2)$. Збир координата је 3.

Тачан одговор је под **Б**.

15. Нека је почетна цена кошуље x. Након поскупљења за 20% цена кошуље је $x+\frac{20}{100}x=x+0,2x=1,2x$. Ако након тога кошуља појефтини 20% цена ће бити $1,2x-\frac{20}{100}1,2x=1,2x-0,24x=0,96x=\frac{96}{100}x$. Крајња цена је 96% од почетне па је кошуља појефтинила за 4%. Тачан одговор је под **Д**.

Пријемни испит 2013 - тест 5

1. Вредност израза $\left(\left(\frac{1}{8}\right)^{-3} : \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} : 8\right)^{-0,5}$ је:

А) $0,25$; Б) 2; В) $0,5$; Г) 4; Д) одговор није понуђен; Н) не знам.

2. После сређивања израз $\left[\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right] : \left[\left[\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right]^2 - \frac{2}{ab}\right]$, где је $ab \neq 0$, једнак је:

А) $\frac{1}{ab}$; Б) $a+b$; В) $a-b$; Г) ab; Д) одговор није понуђен; Н) не знам.

3. Нека је скуп S скуп решења неједначине $\frac{x^2-6x-7}{x^2+3x-4} \leq 0$. Тада је за неке реалне бројеве a, b, c, d $(a < b < c < d)$, скуп S облика:

А) $[a,b) \cup (c,d]$; Б) одговор није понуђен; В) $[a,b] \cup (c,d)$; Г) $(a,b) \cup [c,d]$; Д) $(a,b] \cup (c,d]$; Н) не знам.

4. Троцифрених бројева дељивих са 16 има:

А) 56; Б) 57; В) одговор није понуђен; Г) 59; Д) 58; Н) не знам.

5. Производ решења једначине $4^{|3x+2|-8} = \left(\frac{1}{16}\right)^{x+4}$ је:

А) $\frac{2}{5}$; Б) $-\frac{2}{5}$; В) $\frac{4}{5}$; Г) $-\frac{8}{5}$; Д) одговор није понуђен; Н) не знам.

6. Ако је $3^{1+\log_9 4} + 25^{1-\log_5 2} = \frac{p}{q}$ прост разломак, онда је $p+q$ једнако:

А) 32; Б) одговор није понуђен; В) 53; Г) 38; Д) 112; Н) не знам.

7. Над две супротне странице квадрата странице $1cm$, конструисани су у квадрату једнакостранични троуглови. Површина четвороугла који се добија пресеком та два троугла је (у cm^2):

А) $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$; Б) $\frac{2-\sqrt{3}}{3}$; В) одговор није понуђен; Г) $\frac{2+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$; Д) $\frac{2\sqrt{3}-3}{2\sqrt{3}}$; Н) не знам.

8. Одредити параметар a тако да решења једначине $x^2+(a-3)x+a=0$ буду позитивна. Тада a припада скупу:

А) $(0,3)$; Б) $(0,1]$; В) $(-\infty,1]\cup(9,\infty)$; Г) одговор није понуђен; Д) $(0,1)\cup(9,\infty)$; Н) не знам.

9. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Ако је запремина пирамиде $MNCA_1$, где су M и N средишта ивицаAB и AD, jeftrightднака 1. Колика је

површина коцке?

А) одговор није понуђен; Б) 48; В) 54; Г) 24; Д) 30; Н) не знам.

10. Број решења једначине $1 - \cos x - 2\sin^2 x = 0$ на интервалу $(-2\pi, 2\pi]$ је:

А) 6; Б) одговор није понуђен; В) 5; Г) 8; Д) 7; Н) не знам.

11. Вредност израза $2\cos\frac{7\pi}{12}$ је:

А) одговор није понуђен; Б) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$; В) $-\sqrt{2+\sqrt{3}}$; Г) $-\sqrt{2-\sqrt{3}}$; Д) $-\sqrt{2-\sqrt{2}}$; Н) не знам.

12. Члан развоја $\left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^{20}$ који не садржи x је:

А) 1; Б) 20; В) 190; Г) 4845; Д) одговор није понуђен; Н) не знам.

13. Једначина праве која садржи тачку $A(2,2)$ и нормална је на праву одређену са $B(-3,3)$ и $C(2,-5)$ једнака је:

А) $5x - 8y + 6 = 0$; Б) $-5x + 8y + 6 = 0$; В) $8x - 5y - 6 = 0$;
Г) $8x + 5y - 26 = 0$; Д) одговор није понуђен; Н) не знам.

14. Одредити $a \in R$ тако да права $x - y = 3$ буде тангента елипсе $x^2 + 2y^2 = a$. Тада a припада интервалу:

А) $[1,4)$; Б) $[6,7)$; В) одговор није понуђен; Г) $[4,5)$; Д) $[7,9]$; Н) не знам.

15. Ако је $z = (1-i)^{2013} + \left(\frac{2}{1-i}\right)^{2013}$, тада је $|z|$ једнако:

А) 2^{1006}; Б) одговор није понуђен; В) $2^{\frac{2013}{2}}$; Г) $2^{\frac{2015}{2}}$; Д) $2^{\frac{2011}{2}}$; Н) не знам.

Решење:

1. Записивањем разломака у загради као степена и даљим срећивањем добијамо:

$$\left(\left(\tfrac{1}{8}\right)^{-3} : \left(\tfrac{1}{4}\right)^{-2} : 8\right)^{-0,5} = \left((2^{-3})^{-3} : (2^{-2})^{-2} : 2^3\right)^{-0,5} =$$
$$= (2^9 : 2^4 : 2^3)^{-0,5} = (2^2)^{-0,5} = 2^{-0,5\cdot 2} = 2^{-1} = 0,5.$$

Тачан одговор је под **В**.

2. Свођењем на имениоце и даљим срећивањем добијамо

$$\left[\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right] : \left[\left[\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right]^2 - \frac{2}{ab}\right] = \frac{a^2+b^2}{ab} : \left[\left[\frac{a+b}{ab}\right]^2 - \frac{2}{ab}\right] =$$

$= \frac{a^2+b^2}{ab} : \left[\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2b^2} - \frac{2ab}{a^2b^2}\right] = \frac{a^2+b^2}{ab} : \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} =$
$= \frac{a^2+b^2}{ab} \cdot \frac{a^2b^2}{a^2+b^2} = ab.$
Тачан одговор је под **Г**.

3. Решимо неједначину $\frac{x^2-6x-7}{x^2+3x-4} \leq 0$ тако што ћемо одредити знак имениоца и бројиоца, што значи да треба решити одговарајуће неједначине $x^2-6x-7 \leq 0$ и $x^2+3x-4 \leq 0$. Бројилац можемо записати у облику производа па добијамо еквивалентну неједначину $(x-7)(x+1) \leq 0$ чија су решења $x \in [-1, 7]$. Именилац такође можемо записати у облику производа па добијамо еквивалентну неједначину $(x+4)(x-1) \leq 0$ чија су решења $x \in [-4, 1]$. Ове податке можемо ставити у таблицу

		-4		-1		1		7	
x^2-6x-7	+	+	+	0	-	-	-	0	+
x^2+3x-4	+	0	-	-	-	0	+		+
$\frac{x^2-6x-7}{x^2+3x-4}$	+	недеф	-	0	+	недеф	-	0	+

и одавде закључујемо да је $x \in (-4, -1] \cup (1, 7]$.
Тачан одговор је под **Д**.

4. Пронађимо прво најмањи и највећи троцифрени број дељив са 16. Ако поделимо 100 са 16 добићемо 6.25 па је најмањи троцифрени број дељив са 16 једнак $7 \cdot 16 = 112$. Ако поделимо 1000 са 16 добићемо 62.5 па је највећи троцифрени број дељив са 16 једнак $16 \cdot 62 = 992$. Троцифрене бројеве можемо посматрати користећи аритметички чији је општи члан облика
$a_n = a_1 + (n-1)d = 112 + (n-1) \cdot 16$. Одредимо сада који је по реду члан чија је вредност 992. То постижемо тако што решавамо једначину $992 = 112 + (n-1) \cdot 16$ која је еквивалентна $880 = (n-1) \cdot 16$ тј. $\frac{880}{16} = n-1$. Из претходне једначине добијамо $55 = n-1$ тј. $56 = n$. Одавде закључујемо да троцифрених бројева дељивих са 16 има 56.
Тачан одговор је под **А**.

5. Изразе са леве и десне стране сводимо на исте основе и даљим сређивањем добијамо еквивалентну једначину $4^{|3x+2|-8} = (4^{-2})^{x+4}$ тј. $4^{|3x+2|-8} = 4^{-2x-8}$. Претходна једначина је еквивалентна $4^{|3x+2|} = 4^{-2x}$ коју сводимо на једначину $|3x+2| = -2x$ коју решавамо дискусијом. Ако је $3x+2 \geq 0$ тада је једначина еквивалентна $3x+2 = -2x$ тј. $5x = -2$ чије решење је $x = -\frac{2}{5}$. Провером да ли важи $3x+2 \geq 0$ потврђујемо да је

$x = -\frac{2}{5}$ решење једначине. Ако је $3x + 2 < 0$ што је еквивалентно$x < -\frac{2}{3}$ онда је једначина еквивалентна $-3x - 2 = -2x$ тј.$-2 = x$. Провером да ли важи $-3x - 2 < 0$ потврђујемо да је $x = -2$ решење једначине. Производ решења је $-2 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{5}$.

Тачан одговор је под **B**.

6. Коришћењем основних особина степена добијамо да важе следеће једнакости:

$3^{1+\log_9 4} + 25^{1-\log_5 2} = 3 \cdot 3^{\log_9 4} + 25 \cdot 25^{-\log_5 2} =$

$= 3 \cdot \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_9 4} + 25 \cdot (5^2)^{-\log_5 2} = 3 \cdot \left(9^{\log_9 4}\right)^{\frac{1}{2}} + 25 \cdot \left(5^{-\log_5 2}\right)^2 =$

$= 3 \cdot (4)^{\frac{1}{2}} + 25 \cdot \left(5^{\log_5 \frac{1}{2}}\right)^2 = 3 \cdot 2 + 25 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 + \frac{25}{4} = \frac{49}{4}$.

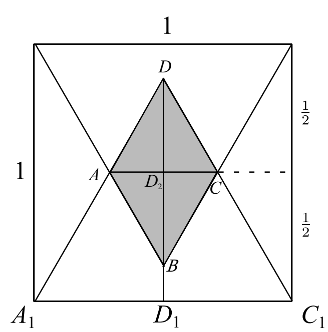
Како је $\frac{49}{4}$ прост разломак то је $49 + 4 = 53$.

Тачан одговор је под **B**.

7. У пресеку два троугла добијамо четвороугао $ABCD$ (сл. 78). Због симетрије $P_{ABCD} = 2P_{\triangle ACD} = 2 \cdot \frac{ah}{2} = AC \cdot DD_2$. Одредимо прво висину троугла $\triangle ACD$ у ознаци $DD_2 = DD_1 - \frac{1}{2}$ где је DD_1 висина троугла $\triangle A_1C_1D$. Како је у питању једнакостраничан троугао то је висина једнака $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Пошто је $a = 1$ висина је $h = DD_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Одавде важи да је $DD_2 = DD_1 - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Дужину странице AC ћемо одредити из сличности троуглова $\triangle ACD$ и $\triangle A_1C_1D$, где је $AC : A_1C_1 = DD_2 : DD_1$. Одавде добијамо да је $AC : 1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2}$ што је еквивалентно $AC = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$. Тражена површина је једнака

$P_{ABCD} = AC \cdot DD_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

Тачан одговор је под **A**.



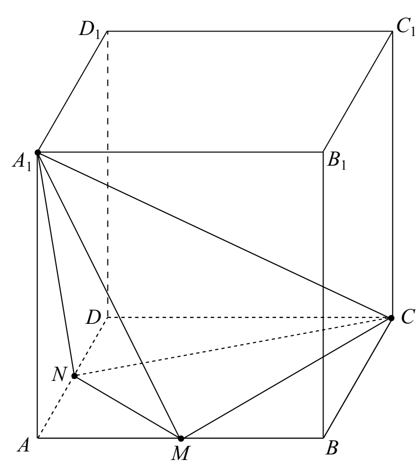
Сл. 78:

8. Да би решења једначине $x^2 + (a-3)x + a = 0$ била позитивна неопходно је и довољно да њихов производ и збир буду позитивни и да дискриминанта буде већа или једнака од нуле. Нека су x_1 и x_2 решења, тада користећи Вијетове формуле мора да важи $x_1 + x_2 = -\frac{a-3}{1} > 0$ и $x_1 \cdot x_2 = \frac{a}{1} > 0$. Пресеком добијамо $a \in (0,3)$. Услов да дискриминанта буде већа или једнака од нуле је еквивалентан неједначини $(a-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot a \geq 0$ тј. $a^2 - 6a + 9 - 4a \geq 0$. Претходна неједначина је екивалентна $a^2 - 10a + 9 \geq 0$ коју можемо записати као $(a-1)(a-9) \geq 0$ чија су решења $a \in (-\infty, 1] \cup [9, +\infty)$. Када добијени скуп пресечемо интервалом $(0,3)$ добијамо $(0,1]$.

Тачан одговор је под **Б**.

9. Како је запремина пирамиде (сл. 79) једнака $V = \frac{1}{3}BH$. Нека је $AB = a$. Тада је $H = a$ и потребно је још одредити површину основе. Површина основе се може израчунати када од површине квадрата одузмемо површине троуглова $\triangle AMN$, $\triangle MBC$ и $\triangle NCD$. Површине троуглова су $P(\triangle AMN) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$, $P(\triangle MBC) = P(\triangle NCD) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2}$. Одавде је $P(\triangle MCN) = a^2 - \frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{8}a^2$. Пошто је запремина коцке 1 то значи да је $1 = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{3}{8}a^2 = \frac{1}{8}a^3$. Одавде добијамо да је $a = 2$, а површина коцке је $P = 6a^2 = 6 \cdot 4 = 24$.

Тачан одговор је под **Г**.



Сл. 79:

10. Када изразимо $\sin x$ преко $\cos x$ добијамо да је полазна једначина еквивалентна $1 - \cos x - 2(1 - \cos^2 x) = 0$ тј. $-1 - \cos x + 2\cos^2 x = 0$.

Увођењем смене $\cos x = t$ добијамо квадратну једначину $2t^2 - t - 1 = 0$ чија су решења $t_1 = 1$ и $t_2 = -\frac{1}{2}$. Враћањем смене добијамо да су решења једначине на интервалу $(-2\pi, 2\pi]$, $-\frac{4}{3}\pi, -\frac{2}{3}\pi, 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, 2\pi$, па има укупно 6 решења на задатом интервалу.

Тачан одговор је под **А**.

11. Користећи формулу за косинус половине угла и даљим сређивањем добијамо једнакости:

$2\cos\frac{7\pi}{12} = 2\cos\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{7\pi}{6}\right) = -2\sqrt{\frac{1+\cos\frac{7\pi}{6}}{2}} = -2\sqrt{\frac{1+\cos(\pi+\frac{\pi}{6})}{2}} =$

$= -2\sqrt{\frac{1+\cos\pi\cos\frac{\pi}{6}-\sin\pi\sin\frac{\pi}{6}}{2}} = -2\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = -2\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = -\sqrt{2-\sqrt{3}}.$

Тачан одговор је под **Г**.

12. Општи члан развоја је облика $\binom{20}{k}\left(x^3\right)^{20-k}\left(x^{-1}\right)^k = \binom{20}{k}x^{60-4k}$. Одавде је неопходно да $60-4k=0$ да не би садржао x. Одавде добијамо да је $k=15$, и одговарајући члан развоја је $\binom{20}{15} = \binom{20}{5} = 15504$.

Тачан одговор је под **Д**.

13. Одредимо прво праву одређену тачкама $B(-3,3)$ и $C(2,-5)$. Једначина те праве је $\frac{y-3}{-5-3} = \frac{x+3}{2+3}$ тј. $\frac{y-3}{-8} = \frac{x+3}{5}$. Сређивањем претходне једначине добијамо једначину праве $8x+5y+9=0$. Коефицијент правца добијене праве је $k=-\frac{8}{5}$. Коефицијент правца праве која је нормална на дату праву је $k = -\frac{1}{-\frac{8}{5}} = \frac{5}{8}$. Једначина праве која садржи тачку A и нормална је на праву одређену тачкама $B(-3,3)$ и $C(2,-5)$ је облика: $y-2 = \frac{5}{8}(x-2)$ тј. $8y-16 = 5x-10$ што представља имплицитну једначину праве $8y-5x-6=0$.

Тачан одговор је под **А**.

14. Елипса се може записати у облику $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{\frac{a}{2}} = 1$. Услов да права $y = kx+n$ буде тангента елипсе $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ је $a^2k^2+b^2=n^2$. Одавде је $a\cdot 1 + \frac{a}{2} = 3^2$ тј. $a\frac{3}{2} = 9$ па је решење једначине $a=6$.

Тачан одговор је под **Б**.

15. Израчунајмо прво сабирке. Да би смо израчунали $(1-i)^{2013}$ одредимо прво неколико првих степена комплексног броја $1-i$.

$(1-i)^2 = 1-2i+i^2 = -2i,$

$(1-i)^3 = -2i+2,$

$(1-i)^4 = -4.$

Одавде следе једнакости

$(1-i)^{2013} = (1-i)^{2012+1} =$

$= (1-i)^{503\cdot 4+1} = ((1-i)^4)^{503} \cdot (1-i) = (-4)^{503} \cdot (1-i)$.
Други сабирак израчунавамо на сличан начин

$$\left(\frac{2}{1-i}\right)^{2013} = \left(\frac{2}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}\right)^{2013} = \left(\frac{2(1+i)}{1+1}\right)^{2013} = (1+i)^{2013}.$$

Добијени израз рачунамо тражећи четврти степен бинома $(1+i)$.

$(1+i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$,
$(1+i)^4 = -4$,

па је

$(1+i)^{2013} = (1+i)^{503\cdot 4+1} = ((1+i)^4)^{503} \cdot (1+i) = (-4)^{503} \cdot (1+i)$.

Одавде је $z = (-4)^{503} \cdot (1-i) + (-4)^{503} \cdot (1+i) = 2(-4)^{503} = -2^{1007}$.
Тачан одговор је под **Б**.

Пријемни испит 2014 - тест 1

1. Вредност израза $\sqrt[3]{2^4 \cdot \sqrt{2}} : \sqrt[4]{2^3 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{2^2}}}$ је облика $2^{\frac{p}{q}}$, где су p и q узајамно прости позитивни бројеви. Тада је $p+q$:

А) 12; Б) 37; В) одговор није понуђен; Г) 45; Д) 53;
Н) не знам.

2. Вредност израза $\left[\left(a+\frac{1}{b}\right)^2 - \frac{2ab+1}{b^2}\right] : \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ $(a, b, a+b \neq 0)$ је:

А) $a+\frac{a^2}{b}$; Б) a; В) $\frac{a^2}{b}$; Г) одговор није понуђен; Д) b;
Н) не знам.

3. Нека је скуп S скуп решења неједначине $\frac{x^2-x-2}{x^2+4x+3} \leq 0$. Тада је за неке реалне бројеве a, b, $(a<b)$, скуп S облика:

А) $[a,b)$; Б) $(a,b]$; В) $[a,b]$; Г) (a,b); Д) одговор није понуђен;
Н) не знам.

4. Четврти и десети чланови растуће аритметичке прогресије су 23 и 45. Збир цифара двадесетдругог члана те прогресије је:

А) одговор није понуђен; Б) 17; В) 7; Г) 11; Д) 3; Н) не знам.

5. Збир решења једначине $36^x - 30 \cdot 6^x + 216 = 0$ припада интервалу:

А) $[0, \frac{9}{10})$; Б) $[\frac{9}{10}, \frac{23}{8})$; В) $[\frac{23}{8}, \frac{43}{8})$; Г) одговор није понуђен;
Д) $[\frac{43}{8}, \frac{54}{8})$; Н) не знам.

6. Ако је $\log_{14} 3 = a$ и $\log_3 7 = b$ онда је $\log_{14} 147$ једнак:

А) $2a+b$; Б) $2b+1$; В) $\frac{1}{a}$; Г) $2b+a$; Д) одговор није понуђен;
Н) не знам.

7. Број дијагонала конвексног n-тоугла је 119. Тада је збир унутрашњих углова тог n-тоугла једнак:

А) $2700°$; Б) одговор није понуђен; В) $2520°$; Г) $3060°$; Д) $2880°$;
Н) не знам.

8. Најмања вредност збира квадрата решења једначине $x^2+(a+1)x+2a-3=0$ је:

А) 13; Б) 12 ; В) 9; Г) 6; Д) одговор није понуђен;
Н) не знам.

9. Ако купа има једнаке висину и полупречник основе, колико пута треба увећати висину (полупречник се не мења) да би се површина омотача duplicirala:

А) $\sqrt{3}$пута; Б) 7 пута; В) $\sqrt{7}$пута; Г) 3 пута;
Д) одговор није понуђен; Н) не знам.

10. Број решења једначине $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$ на интервалу $(-\pi, 2\pi]$ је:

А) 6; Б) 5; В) одговор није понуђен; Г) 4; Д) 8; Н) не знам.

11. Вредност израза $\cos^4 \frac{\pi}{16} + \cos^4 \frac{7\pi}{16}$ је:

А) одговор није понуђен; Б) $\frac{6+2\sqrt{2}}{4}$; В) $\frac{4+\sqrt{2}}{4}$; Г) $\frac{4-\sqrt{2}}{4}$;
Д) $\frac{6+\sqrt{2}}{8}$; Н) не знам.

12. Збир првих координата тачака пресека функција
$f(x) = |3x+4| - |4x-3|$ и $g(x) = 4x+1$ једнак је:

А) $-\frac{22}{15}$; Б) $-\frac{32}{15}$; В) $-\frac{4}{5}$; Г) одговор није понуђен; Д)$-\frac{8}{15}$;
Н) не знам.

13. Збир решења једначине $\sqrt{x+3} - \sqrt{2-x} = 1$ једнак је:

А) -1; Б) 0; В) 1; Г) одговор није понуђен; Д) 2; Н) не знам.

14. Једначина тангенте на кружницу $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 8$ која је паралелна правој $y = x - 1$ и њој најближа је:

А) $y = x-5$; Б) одговор није понуђен; В) $y = x-4$; Г) $y = x-3$;
Д) $y = x-6$; Н) не знам.

15. Колико литара дестиловане воде треба помешати са 150 литара 5% раствора алкохола да би се добила смеша 3% раствора алкохола?

А) одговор није понуђен; Б) 98 ; В) 104 Г) 112; Д) 118;
Н) не знам.

Решење:

1. Изражавањем корена користећи степене добијамо једнакости

$$\sqrt[3]{2^4 \cdot \sqrt{2}} : \sqrt[4]{2^3 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{2^2}}} = \sqrt[3]{2^{9/2}} : \sqrt[4]{2^3 \cdot \sqrt{2^{5/3}}} =$$
$$= 2^{3/2} : \sqrt[4]{2^{23/6}} = 2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{-\frac{23}{24}} = 2^{\frac{13}{24}}.$$

Тачан одговор је под **Б**.

2. Свођењем на заједничке имениоце и даљим сређивањем добијамо једнакости:

$$\left[\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 - \frac{2ab+1}{b^2}\right] : \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \left[\frac{a^2b^2+2ab+1}{b^2} - \frac{2ab+1}{b^2}\right] : \frac{ab}{b+a} = a^2 \cdot \frac{a+b}{ab} = a + \frac{a^2}{b}.$$

Тачан одговор је под **А**.

3. За неједначину $\frac{x^2-x-2}{x^2+4x+3} \leq 0$ формирамо табелу са знаком имениоца и бројица:

		-3		-1		2	
x^2-x-2	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
x^2+4x+3	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f	$+$	$\mid$	$-$	$\mid$	$-$	0	$+$

Из табеле видимо да је $x \in (-3,-1) \cup (-1,2]$.
Тачан одговор је под **Д**.

4. Из поставке задатка имамо да је $a_4 = 23$ и $a_{10} = 35$, па је $a_1+3d = 23$ и $a_1 + 9d = 45$. одузимањем једначина добијамо $6d = 22$ одакле следи $d = \frac{11}{3}$, $a_1 = 12$. Тада $a_{22} = a_1 + 21d = 89$.
Тачан одговор је под **Б**.

5. Увођењем смене $6^x = t$ добијамо $t^2-30 \cdot t+216 = 0$, а њена решења су $t_1 = 12$ и $t_2 = 18$, односно $x_1 = \log_6 12$ и $x_2 = \log_6 18$. Збир решења је $x_1 + x_2 = \log_6 18 + \log_6 12 = \log_6(12 \cdot 18) = \log_6 6^3 = 3$.
Тачан одговор је под **В**.

6. Како је $\log_{14} 3 = a$ онда је $\log_3 14 = \frac{1}{a}$. Сређивањем добијамо
$\log_{14} 147 = \log_{14}(3 \cdot 7^2) = \frac{\log_3(3 \cdot 7^2)}{\log_3 14} = \frac{\log_3 3+2\log_3 7}{\frac{1}{a}} = a(1+2b)$.
Тачан одговор је под **Д**.

7. Број дијагонала конвексног n-тоугла је $D_n = \frac{n(n-3)}{2} = 119$ одакле следи да је $n = 17$. Збир унутрашњих углова тог 17-тоугла једнак је $S_{17} = (17-2) \cdot 180 = 2700$.
Тачан одговор је под **А**.

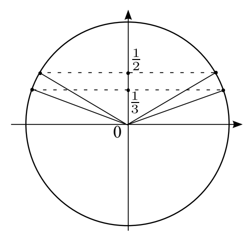
8. Из квадратне једначине применом Виетових формула имамо да је $x_1 + x_2 = -\frac{a+1}{1} = -a-1$ и $x_1 \cdot x_2 = \frac{2a-3}{1} = 2a-3$. Како се тражи минимална вредност израза $x_1^2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2-2x_1x_2$ заменом добијамо $x_1^2+x_2^2 = (-a-1)^2-2(2a-3) = (a-1)^2+6$, тако да је минимална вредност 6 када је $a = 1$.
Тачан одговор је под **Г**.

9. Површина омотача је $M = sr\pi = r\pi\sqrt{r^2+H^2}$, ако је $H = r$, добијамо да је $M = r^2\pi\sqrt{2}$. Површина омотача друге купе је једнака $M_1 = s_1r_1\pi = r_1\pi\sqrt{r_1^2+H_1^2}$. Ако важи $M_1 = 2M$ и $r_1 = r$, заменом добијамо $r\pi\sqrt{r^2+H_1^2} = 2r^2\pi\sqrt{2}$ одакле следи $H_1 = r\sqrt{7}$.

Тачан одговор је под **В**.

10. Увођењем смене $\sin x = t$ добијамо $6t^2 - 5 \cdot t + 1 = 0$, а њена решења су $t_1 = \frac{1}{3}$ и $t_2 = \frac{1}{2}$, односно $\sin x = \frac{1}{3}$ и $\sin x = \frac{1}{2}$. Са слике. 80 видимо да имамо четири решења јер $x \in (-\pi, 2\pi]$.

Тачан одговор под **Г**.



Сл. 80:

11. Користећи косинус збира добијамо једнакости:

$\cos^4 \frac{\pi}{16} + \cos^4 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{16}\right) = \cos^4 \frac{\pi}{16} + \sin^4 \frac{\pi}{16} =$

$= \left(\cos^2 \frac{\pi}{16} + \sin^2 \frac{7}{16}\right)^2 - 2\sin^2 \frac{\pi}{16} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{16} =$

$= 1 - \frac{1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\pi}{8} = 1 - \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{4} = \frac{6+\sqrt{2}}{8}$.

Тачан одговор је под **Д**.

12. Пресечне тачке добијамо решавањем $|3x+4| - |4x-3| = 4x+1$. Имамо три случаја:

за $x < -\frac{4}{3}$ добијамо $-3x - 8 = 0$, па је $x = -\frac{8}{3}$;

за $-\frac{4}{3} \leq x < \frac{3}{4}$ добијамо $3x = 0$, па је $x = 0$;

за $x \geq \frac{3}{4}$ добијамо $-5x + 6 = 0$, па је $x = \frac{6}{5}$;

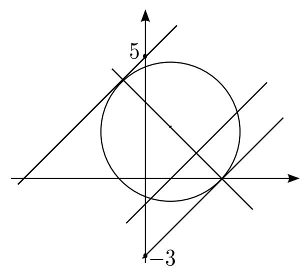
Добијене пресечне тачке су $\left(-\frac{8}{3}, -\frac{29}{3}\right)$, $(0,1)$ и $\left(\frac{6}{5}, \frac{29}{5}\right)$, а збир првих координата је $-\frac{8}{3} + 0 + \frac{6}{5} = -\frac{22}{15}$.

Тачан одговор је под **А**.

13. Квадрирањем добијамо $x + 3 - 2\sqrt{x+3}\sqrt{2-x} + 2 - x = 1$ одакле следи $2 = \sqrt{6 - x - x^2}$. Новим квадрирањем добијамо $x^2 + x - 2 = 0$, а њена решења су $x_1 = 1$ и $x_2 = -2$. Како нисмо писали услове задатка, добијена решења мењамо у полазну једначину и тако добијамо да је решење само $x = 1$

Тачан одговор је под **В**.

14. Коефицијент тангенте је $k_t = 1$, јер је паралелна са датом правом. Услов да права $y = kx + n$ додирује кружницу је $(kp - q + n)^2 = r^2(k^2 + 1)$, заменом познатог добијамо $(1 \cdot 1 - 2 + n)^2 = 8(1 + 1)$, а њена решења су $n = -3$ или $n = 5$. Са слике 81 видимо да је за ближу тангенту $n = -3$.



Сл. 81:

Тачан одговор је под **Г**.

15. Коришћењем табеле добијамо да је однос воде и алкохола $2 : 3$, па одатле закључујемо да нам треба $100l$ воде.

вода	0%	$\searrow$		$\nearrow$	$5 - 3 = 2$	$2 \cdot 50 = 100$
			3%			
алкохол	5%	$\nearrow$		$\searrow$	$3 - 0 = 3$	$3 \cdot 50 = 150$

Тачан одговор је под **А**.

Пријемни испит 2014 - тест 2

1. Вредност израза $\left(\frac{5}{7} : \frac{4}{63} - 5\right)^{-\frac{1}{2}} + 12 \cdot 25^{-0,5} : 4$ припада интервалу:
А) $[0, \frac{9}{10})$; Б) $[\frac{9}{10}, \frac{23}{8})$; В) $[\frac{23}{8}, \frac{43}{8})$; Г) одговор није понуђен; Д) $[\frac{43}{8}, \frac{54}{8})$; Н) не знам.

2. Вредност израза $\left(\frac{1}{(a+b)^2-(a-b)^2}\right) : \left(\frac{1}{4a} + \frac{1}{4b}\right)$ $(a, b, a+b \neq 0)$ је:
А) $\frac{1}{ab}$; Б) 1; В) $a+b$; Г) $\frac{1}{a+b}$; Д) одговор није понуђен; Н) не знам.

3. Решења неједначине $\frac{(x-2014)^2}{x+3} \leq 0$ која припадају скупу природних бројева $(x \in N)$ има:
А) одговор није понуђен; Б) 0; В) 1; Г) 3; Д) бесконачно много; Н) не знам.

4. Ако за опадајућу геометријску прогресију важи $5a_2 + 4a_4 = 1$ и $a_2 - a_4 = \frac{1}{8}$. Онда је вредност израза $\frac{3}{8}a_1 + 42a_2 + 24a_3 - 3a_4$ једнака:
А) одговор није понуђен; Б) 7; В) 11; Г) 8; Д) 3; Н) не знам.

5. Збир решења једначине $\sqrt{3x+10} - \sqrt{x+4} = 2$ једнак је:
А) 5; Б) одговор није понуђен; В) 3; Г) 2; Д) -3; Н) не знам.

6. Ако је $\log_4 9 = a$ и $\log_4 49 = b$ онда је $\log_{63} 112$ једнак:
А) $\frac{4+b}{b+a}$; Б) $\frac{2+b}{b+2a}$; В) одговор није понуђен; Г) $\frac{2a+b}{4+b}$; Д) $\frac{4+b}{2a+b}$; Н) не знам.

7. Ако се обим круга повећа за 10%, онда се његова површина:
А) повећа за 15%; Б) одговор није понуђен; В) повећа за 10%;
Г) повећа за 20%; Д) повећа за 25%; Н) не знам.

8. Збир вредности реалног параметра a за које теме параболе $y = x^2 + (a-3)x + a + 3$ припада правој $y = x + 2$ је:
А) 11; Б) 13 ; В) 9; Г) 12; Д) одговор није понуђен; Н) не знам.

9. Колико пута треба увећати висину ваљка да би се површина увећала два пута, ако је однос полупречника основе и висине 2 : 1:
А) 4 пута; Б) 5 пута; В) 2 пута; Г) 3 пута; Д) одговор није понуђен; Н) не знам.

10. Број решења једначине $\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x + 1 = 0$ на интервалу $[0, 2\pi]$ је:

А) 6;   Б) 5;   В) одговор није понуђен;   Г) 4;   Д) 8;   Н) не знам.

11. Ако је $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ и $\cos\beta = -\frac{4}{5}$, $\beta \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, онда је $\sin(\alpha+\beta)$ једнако:

А) $\frac{48}{65}$;   Б) $\frac{63}{65}$;   В) $-\frac{33}{65}$;   Г) $-\frac{63}{65}$;   Д) одговор није понуђен;
Н) не знам.

12. Дате су тачке $A(3,0)$ и $B(0,2)$. Збир координата тачке која је симетрична координатном почетку у односу на праву одређену тачкама A и B једнак је :

А) 6;   Б) 5 ;   В) одговор није понуђен;   Г) 18;   Д) 8;   Н) не знам.

13. Друга координата тачке на елипси $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ која је најближа правој $y = \frac{2}{\sqrt{3}}x - 4$ једнака је :

А) $\sqrt{3}$;   Б) $-3\sqrt{3}$;   В) $-\frac{3}{2}\sqrt{3}$;   Г) одговор није понуђен;   Д) -1;
Н) не знам.

14. Полином $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ је дељив са $x-1$ и $x+2$ а при дељењу са $x-2$ добија се остатак 20. Тада је $a + 2b + c$ једнако:

А) -1;   Б) одговор није понуђен;   В) 1;   Г) 0;   Д) -3;
Н) не знам.

15. Колико литара 4% раствора алкохола треба додати у 100 литара 10% раствора да би се добио 6% раствор алкохола?

А) 500;   Б) одговор није понуђен ;   В) 400;   Г) 300;   Д) 200;
Н) не знам.

Решење:

1. Свођењем свих бројева на разломке добијамо једнакости
$\left(\frac{5}{7} : \frac{4}{63} - 5\right)^{-\frac{1}{2}} + 12 \cdot 25^{-0,5} : 4 = \left(\frac{5}{7} \cdot \frac{63}{4} - 5\right)^{-\frac{1}{2}} + 12 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1.$
Тачан одговор је под **Б**.

2. Свођењем израза у другој загради на заједничке имениоца и даљим сређивањем добијамо
$\left(\frac{1}{(a+b)^2-(a-b)^2}\right) : \left(\frac{1}{4a} + \frac{1}{4b}\right) = \frac{1}{4ab} \cdot \frac{4ab}{b+a} = \frac{1}{a+b}$.
Тачан одговор је под **Г**.

3. Да би решили неједначину формираћемо таблицу где ћемо записати знак имениоца и бројиоца. Користећи табелу закључујемо да је
$x \in (-\infty, -3) \cup \{2014\}$.

		-3		2014	
$(x-2014)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f	$-$	$\vert$	$+$	0	$+$

За $x \in N$ решење је само $x = 2014$.

Тачан одговор је под **В**.

4. Множењем друге једначине са 4 и додавањем првој добијамо да је $9a_2 = \frac{3}{2}$ тј. $a_2 = \frac{1}{6}$ одакле следи $a_4 = \frac{1}{24}$. Како је $a_4 = a_2 q^2$ следи да је $q = \pm\frac{1}{2}$, а на основу поставке задатка је $q = \frac{1}{2}$. Тада је израз $\frac{3}{8}a_1 + 42a_2 + 24a_3 - 3a_4 = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{6} : \frac{1}{2} + 42 \cdot \frac{1}{6} + 24 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{1}{24} = 9$.

Тачан одговор је под **А**.

5. Пребацивањем другог корена на десну страну добијамо једначину $\sqrt{3x+10} = \sqrt{x+4} + 2$, па квадрирањем претходне једначине добијамо ирационалне једначине $3x + 10 = x + 4 + 4\sqrt{x+4} + 4$ одакле следи $x+1 = 2\sqrt{x+4}$. Поновним квадрирањем, добијемо квадратну једначину $x^2 - 2x - 15 = 0$, а њена решења су $x_1 = 5$ и $x_2 = -3$. Како нисмо писали услове задатка, добијена решења мењамо у полазну једначину и тако добијамо да је решење $x = 5$.

Тачан одговор је под **А**.

6. Из услова задатка имамо

$$\log_4 9 = \log_{2^2} 3^2 = \tfrac{2}{2}\log_2 3 = a \text{ и } \log_4 49 = \log_{2^2} 7^2 = \tfrac{2}{2}\log_2 7 = b.$$

Одатле је

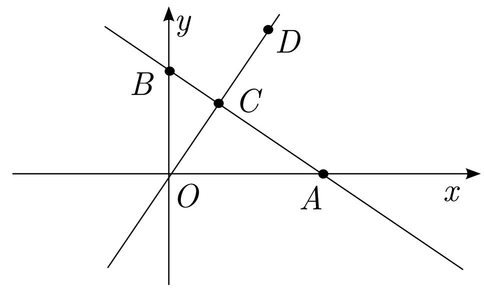
$$\log_{63} 112 = \log_{14}(3 \cdot 7^2) = \frac{\log_2\left(2^4 \cdot 7\right)}{\log_2(3^2 \cdot 7)} = \frac{4\log_2 2 + \log_2 7}{2\log_2 3 + \log_2 7} = \frac{4+b}{2a+b}.$$

Тачан одговор је под **Д**.

7. Ако обим $O = 2r\pi$ повећамо за 10%, добијамо $O_1 = \frac{11}{10} \cdot O$ одатле следи $r_1 = \frac{11}{10}r$. Тада је нова површина $P_1 = r_1^2\pi = \frac{121}{100}r^2\pi = \frac{121}{100}P$, па је површина повећана за 21%.

Тачан одговор је под **Б**.

8. Координате темена параболе су $T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. Заменом добијамо $T\left(-\frac{a-3}{2\cdot 1}, \frac{4\cdot 1\cdot(a+3)-(a-3)^2}{4\cdot 1}\right)$, односно $T\left(\frac{3-a}{2}, \frac{-a^2+10a+3}{4}\right)$. Како теме припада правој $y = x + 2$, заменом одговарајућих координата добијамо да важи



Сл. 82:

$\frac{-a^2+10a+3}{4} = \frac{3-a}{2} + 2$ одкле следи $a^2 - 12a + 11 = 0$. Решења претходне једначине су $a_1 = 1$ и $a_2 = 11$.

Тачан одговор је под **Г**.

9. По задатку имамо $r : H = 2 : 1$, па је $r = 2H$. Површина ваљка је $P = 2r\pi(r + H)$, а тражена дупла површина је $P_1 = 2P$ одакле следи $2r_1\pi(r_1 + H_1) = 4r\pi(r + H)$. Заменом у претходној једначини добијамо $2 \cdot 2H\pi(2H + H_1) = 4 \cdot 2H\pi(2H + H)$ одакле следи $H_1 = 4H$.

Тачан одговор је под **А**.

10. Једначину делимо са 2, и добијамо $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x = -\frac{1}{2}$ одакле следи $\cos\frac{\pi}{6}\sin 2x - \sin\frac{\pi}{6}\cos 2x = -\frac{1}{2}$ тј. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$, па је $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ или $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} + 2l\pi$, односно $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$ или $x = \pi + l\pi$, $k, l \in Z$. Како је $x \in [0, 2\pi]$, онда је $x \in \{0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\}$.

Тачан одговор је под **Б**.

11. Угао α је угао другог квадранта па $\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\frac{5}{13}$, а β угао трећег квадранта, онда важи $\sin\beta = -\sqrt{1 - \cos^2\beta} = -\frac{3}{5}$. Тражимо $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = -\frac{33}{65}$.

Тачан одговор је под **В**.

12. Коефицијент правца нормале n на дуж AB (сл. 82) је $k_n = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{\frac{0-2}{3-0}} = \frac{3}{2}$. Тражена права $n:\ y - 0 = \frac{3}{2}(x - 0)$ јер садржи координатни почетак. Пресек C правих $AB:\ y - 0 = -\frac{2}{3}(x - 3)$ и n добија се решавањем система, па је $C\left(\frac{12}{13}, \frac{18}{13}\right)$. Ако је тачка D симетрична тачки O у односу на тачку C, онда је тачка C средиште дужи OD, па је $C\left(\frac{x_O+x_D}{2}, \frac{y_O+y_D}{2}\right)$, односно $C\left(\frac{24}{13}, \frac{36}{13}\right)$.

Тачан одговор је под **В**.

13. Полуосе елипсе су $a = 3$ и $b = 2$. Услов додира праве $y = \frac{2}{\sqrt{3}}x + n$ (тангента паралелна са датом правом) и елипсе је $a^2k^2 + b^2 = n^2$, па је $9 \cdot \frac{4}{3} + 4 = n^2$, односно $n = \pm 4$.За $n = -4$ добијамо баш задану праву, па је додирна тачка најближа. Решавањем система $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ и $y = \frac{2}{\sqrt{3}}x - 4$, добијамо тачку $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -1\right)$.

Тачан одговор је под **Д**.

14. По Безуовој теореми имамо $P(1) = 0$, $P(-2) = 0$, $P(2) = 20$, заменом у полином добијамо систем једначина

$$a + b + c = -1,\ 4a - 2b + c = 8,\ 4a + 2b + c = 12,$$

а њихово решење је $(a, b, c) = (4, 1, -6)$, па је $a + 2b + c = 0$.

Тачан одговор је под **Г**.

15. Коришћењем табеле добијамо да је однос алкохола $4 : 2$, па одатле закључујемо да нам треба $200l$ 4% раствора алкохола.

алкохол	4%	$\searrow$		$\nearrow$	$10 - 6 = 4$	$4 \cdot 50 = 200$
			6%			
алкохол	10%	$\nearrow$		$\searrow$	$6 - 4 = 2$	$2 \cdot 50 = 100$

Тачан одговор је под **Д.**

Пријемни испит 2014 - тест 3

1. Вредност израза $\left(\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{7}}+\left(\frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{8}}$ је:

А) 1; Б) $\frac{1}{15}$; В) $\frac{16}{15}$; Г) $\sqrt{7}$; Д) одговор није понуђен; Н) не знам.

2. Вредност израза $\frac{1}{(a+b)^3-(a+b)(a^2-ab+b^2)}:\left(\frac{1}{3a}+\frac{1}{3b}\right)$ $(a,b,a+b\neq 0)$ је:

А) a^2b^2; Б) $\frac{1}{a+b}$; В) $a+b$; Г) одговор није понуђен; Д) ab; Н) не знам.

3. Решења неједначине $\frac{x-1}{(x+2)^2}\leq 0$ је:

А) одговор није понуђен; Б) $(-\infty,1]$; В) $(-\infty,1)$; Г) $(1,\infty)$; Д) $[1,\infty)$; Н) не знам.

4. Четвороцифрених бројева дељивих са 101 има:

А) одговор није понуђен; Б) 90; В) 89; Г) 88; Д) 91; Н) не знам.

5. Број реалних решења једначине $4^{-x}+4^x=5(1-2^{-2x})$ једнак је:

А) одговор није понуђен; Б) 2; В) 1; Г) 0; Д) 3; Н) не знам.

6. Скуп решења неједначине $\log_2 x\cdot\log_{2x}2\cdot\log_2 16x<4$ је:

А) $(\frac{1}{4},\frac{1}{2})\cup(4,+\infty)$; Б) $(0,\frac{1}{4})\cup(\frac{1}{2},4)$; В) $(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$; Г) $(0,\frac{1}{2})$; Д) одговор није понуђен; Н) не знам.

7. Када се пречник круга повећа за 6, његова површина се утростручи. Тада је полупречник круга једнак:

А) $\frac{3}{2}(1+\sqrt{3})$; Б) одговор није понуђен; В) $3(1+\sqrt{3})$; Г) $\frac{3}{2}(\sqrt{3}-1)$; Д) $3(\sqrt{3}-1)$; Н) не знам.

8. Збир решења једначине $|3x-2|-|2x-3|=3$ једнак је:

А) одговор није понуђен; Б) 0 ; В) -4; Г) -2; Д) 2; Н) не знам.

9. Ако је у коцки $ABCDA'B'C'D'$ растојање од тачке A' до дијагонале AC' једнако 3, површина сфере описане око коцке једнака је:

А) $\frac{27}{2}\pi$; Б) $\frac{81}{4}\pi$; В) $\frac{81}{2}\pi$; Г) одговор није понуђен; Д) 81π; Н) не знам.

10. Број решења једначине $2\sin x+\sin 2x=0$ на интервалу $[-\pi,2\pi]$ је:

А) 6; Б) 5; В) одговор није понуђен; Г) 4; Д) 8; Н) не знам.

11. Ако је $\operatorname{tg}\alpha = -2$, $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ и $\operatorname{tg}\beta = 3$, $\beta \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, онда је $\sin(\alpha+\beta)$ једнако:

А) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; Б) $\frac{7}{5\sqrt{2}}$; В) $-\frac{7\sqrt{2}}{5}$; Г) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; Д) одговор није понуђен; Н) не знам.

12. Дат је троугао теменима $A(2,3)$, $B(4,6)$ и $C(3,5)$. Једначина праве на којој се налази висина из темена C је :

А) одговор није понуђен; Б) $2x-3y-21=0$; В) $2x+3y+21=0$; Г) $3x+2y-21=0$; Д) $3x+2y+21=0$; Н) не знам.

13. Слободни коефицијент тангенте на параболу $y^2 = 2x$ кроз тачку $A(1,\sqrt{2})$ једнак је :

А) одговор није понуђен; Б) $\sqrt{2}$; В) $2\sqrt{2}$; Г) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; Д) $\frac{3}{\sqrt{2}}$; Н) не знам.

14. Збир решења једначине $\sqrt{1+4x-x^2} = x-1$ се налази на интервалу:

А) одговор није понуђен; Б) $[1,2]$; В) $[2,4)$; Г) $[-2,1)$; Д) $[0,3)$; Н) не знам.

15. Прво је артикал поскупео 20% а потом је појефтинио 10%. Укупно се цена променила за 16 динара. Колика је била цена на почетку?

А) 200; Б) 160 ; В) 240; Г) 220; Д) одговор није понуђен; Н) не знам.

Решење:

1. Рационалисањем разломака добијамо

$$\left(\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{7}} + \left(\frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{8}} =$$

$$= \frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}+\sqrt{7}+\sqrt{2}}{7-2}\cdot\frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{\sqrt{8}+\sqrt{5}+\sqrt{8}-\sqrt{5}}{8-5}\cdot\frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{2}{5}+\frac{2}{3} = \frac{16}{15}.$$

Тачан одговор је под **В**.

2. Факторисањем имениоца добијамо једнакости

$$\frac{1}{(a+b)^3-(a+b)(a^2-ab+b^2)} : \left(\frac{1}{3a}+\frac{1}{3b}\right) =$$

$$= \frac{1}{(a+b)(a^2+2ab+b^2-a^2+ab-b^2)}\cdot\frac{3ab}{a+b} = \frac{1}{(a+b)^2}.$$

Тачан одговор је под **Г**.

3. За неједначину $\frac{x-1}{(x+2)^2} \leq 0$ формирамо табелу која садржи знаке имениоца и бројиоца . Из табеле видимо да је $x \in (-\infty,-2)\cup(-2,1]$.

Тачан одговор је под **А**.

		-2		1	
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+2)^2$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
f	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$

4. Најмањи четвороцифрени број дељив са 101 је $a_1 = 1010$, а највећи е четвороцифрени број дељив са 101 је $a_n = 9999$. Разлика између два суседна броја деливих са 101, је баш $d = 101$. Како се ради о аритметичком низу, имамо да важи да је $a_n = a_1 + d(n-1)$, односно $9999 = 1010 + 101 \cdot (n-1)$, па је $n = 90$.

Тачан одговор је под **Б**.

5. Увођењем смене $4^x = t$ добијамо $\frac{1}{t} + t = 5(1 - \frac{1}{t}) \Rightarrow t^2 - 5t + 6 = 0$, а њена решења су $t_1 = 2$ и $t_2 = 3$, односно $x_1 = \log_4 2 = \frac{1}{2}$ и $x_2 = \log_4 3$.

Тачан одговор је под **Б**.

6. Сређивањем добијамо $\log_2 x \cdot \frac{1}{\log_2 2 + \log_2 x} \cdot (\log_2 16 + \log_2 x) < 4$. Увођењем смене $\log_2 x = t$ добијамо $t \cdot \frac{1}{1+t} \cdot (4+t) < 4$ одакле следи $\frac{t^2-4}{t+1} < 0$. Из табеле видимо да је $t \in (-\infty, -2) \cup (-1, 2)$, па враћањем смене имамо $x \in (0, \frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{2}, 4)$.

Тачан одговор је под **Б**.

		-2		-1		2	
t^2-4	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$t+1$	$-$	$-$	$-$	$\vert$	$+$	$+$	$+$
f	$-$	0	$+$	$\vert$	$-$	0	$+$

7. Површина круга једнака је $P = r^2\pi$. Ако је $r_1 = r + 3$ и $P_1 = 3P$, онда је $P_1 = r_1^2\pi \Rightarrow (r+3)^2\pi = 3r^2\pi \Rightarrow 2r^2 - 6r - 9 = 0$, па је $r = \frac{3}{2}\left(1 + \sqrt{3}\right)$.

Тачан одговор је под **А**.

8. Први случај: за $x \in (-\infty, \frac{2}{3}]$ имамо $-(3x-2) + (2x-3) = 3$, па је $x = -4$, што прихватамо као решење;

Други случај: за $x \in (\frac{2}{3}, \frac{3}{2}]$имамо $(3x-2) + (2x-3) = 3$, па је $x = \frac{8}{5}$, што не прихватамо као решење;

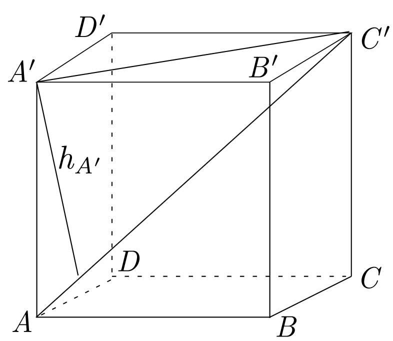
Трећи случај: за $x \in (\frac{3}{2}, \infty)$имамо $(3x-2) - (2x-3) = 3$, па је $x = 2$, што прихватамо као решење.

Збир решења је $-4 + 2 = -2$.

Тачан одговор је под **Г**.

9. Троугао $AA'C'$ је правоугли јер је ивица коцке AA' нормална на страницу $A'B'C'D'$ (сл. 83). Висна тог троугла из темена A' је $h_{A'} = 3$. Нека је страница коцке $AB = a$, $A'C' = a\sqrt{2}$ као дијагонала квадтата и $AC' = a\sqrt{3}$ као дијагонала коцке. По формулама за површину правоуглог троугла имамо $\frac{AC' \cdot h_{A'}}{2} = \frac{AA' \cdot A'C'}{2}$ одкле следи $a = \frac{3}{2}\sqrt{6}$. Полупречник описане свере око коцке је пола велике дијагонале, односно $R = \frac{9}{4}\sqrt{2}$, па је површина описане лопте $P = 4R^2\pi = \frac{81}{2}\pi$.

Тачан одговор је под **В**.



Сл. 83:

10. Применом адиционе формуле добијамо $2\sin x + 2\sin x \cdot \cos x = 0$, односно $2\sin x(1 + \cos x) = 0$, па је $\sin x = 0$ или $\cos x = -1$. Решења наше једначине су $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ или $x = \pi + 2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$, односно све је обухваћено са $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ако још додамо и услов задатка да је $x \in [-\pi, 2\pi]$, онда је $x \in \{-\pi, 0, \pi, 2\pi\}$.

Тачан одговор је под **Г**.

11. Како је α угао другог квадранта, онда важи $\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ и $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, а β угао трећег квадранта, онда важи да је $\sin\beta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$ и $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$. Тражени израз израчунавамо по формули $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{5\sqrt{2}}$.

Тачан одговор је под **Д**.

12. Коефицијент правца висине h_C из теменена C добијамо по формули $k_{h_C} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{2}{3}$, јер је $h_C \perp AB$. Једначину праве на којој лежи висина

h_C добијамо као праву која садржи дату тачку и има дати коефицијент $y - 5 = -\frac{2}{3}(x - 3)$ одакле следи $2x + 3y - 21 = 0$.

Тачан одговор је под **А**.

13. Једначина праве која пролази кроз тачку A са коефицијентом k је $y = kx - k + \sqrt{2}$. Да би та права била тангенту на параболу мора бити испуњен услов $p = 2kn$, па је $1 = 2 \cdot k \cdot \left(\sqrt{2} - k\right) \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{2}}, \, n = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Тачан одговор је под **Г**.

14. Квадрирањем једначине добијамо $1 + 4x - x^2 = x^2 - 2x + 1$, па добијемо $2x^2 - 6x = 0$, а њена решења су $x_1 = 0$ и $x_2 = 3$. Како нисмо писали услове задатка, добијена решења мењамо у полазну једначину и тако добијамо да је решење само $x = 3$.

Тачан одговор је под **В**.

15. Ако са x обележимо првобитну цену, са y цену после првог поскупљења и са z крајњу цену, онда ће важити следеће једначине $y = \left(1 + \frac{20}{100}\right) x$ и $z = \left(1 - \frac{10}{100}\right) y$, па је $z = \frac{9}{10} \cdot \frac{6}{5} x = \frac{27}{25} x$. Одавде видимо да је артикал укупно поскупео, па важи $x + 16 = z$ одакле следи $x + 16 = \frac{27}{25} x$ тј. $x = 200$ динара.

Тачан одговор је под **А**.

Пријемни испит 2014 - тест 4

1. Вредност израза $\left(\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{10}+\sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{3})}{\sqrt{2}+1}-1\right)^2$ је:

А) одговор није понуђен; Б) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$; В) $\sqrt{2}+1$; Г) 1; Д) 2; Н) не знам.

2. Вредност израза $\left[\left(b+\frac{1}{a}\right)^2-\left(a+\frac{1}{b}\right)^2\right]:\frac{(1+ab)^2}{a^2b^2}$ $(ab, 1+ab\neq 0)$ је:

А) b^2-a^2; Б) a^2-b^2; В) одговор није понуђен; Г) $\frac{1}{b^2-a^2}$; Д) $\frac{1}{a^2-b^2}$; Н) не знам.

3. Решења неједначине $\frac{x^2-x-10}{x+9}\leq 2$ која припадају скупу природних бројева $(x\in N)$ има:

А) одговор није понуђен; Б) 7; В) бесконачно много; Г) 8; Д) 3; Н) не знам.

4. Збир првих шест чланова аритметичке прогресије, коју чине несуседни бројеви и за коју важи $a_2+a_4=16$, $a_2\cdot a_5=70$, једнак је:

А) одговор није понуђен; Б) 54; В) 57; Г) 40; Д) 43; Н) не знам.

5. Збир решења једначине $12(2^{x-1}-4)=16-5\cdot 2^{x+1}$ се налази у интервалу:

А) одговор није понуђен; Б) $[-2,0]$; В) $[-4,-2)$; Г) $(-\infty,-4)$; Д) $(0,2]$; Н) не знам.

6. Скуп решења неједначине $\log_{1/2}(x^2-7x+12)<\log_{1/2}(6-2x)$ је:

А) одговор није понуђен; Б) $(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$; В) $(4,+\infty)$; Г) $(2,3)$; Д) $(1,3)$; Н) не знам.

7. Тетиве кружнице $AB=9$ и $CD=11$ секу се у тачки S. Ако је $AS=3$ онда је DS, $(DS>CS)$ једнако:

А) 6; Б) 2; В) одговор није понуђен; Г) 4; Д) 8; Н) не знам.

8. Број целобројних вредности параметра b за које је неједначина $\frac{2x^2+bx+8}{x^2+4}\geq 10$ тачна за свако $x\in R$ је:

А) 5; Б) 6; В) 7; Г) одговор није понуђен; Д) 9; Н) не знам.

9. Дат је квадар чија је основа квадрат странице a и висина H. Ако се зна да је $P=1000cm^2$ и да је $a+H=30cm$, израчунати запремину пирамиде чија је основа једна бочна страна а теме се налази на центру основе:

А) $\frac{1000}{3}cm^3$; Б) $\frac{4000}{3}cm^3$; В) $\frac{2000}{3}cm^3$; Г) одговор није понуђен; Д) $\frac{500}{3}cm^3$; Н) не знам.

10. Број решења једначине $\sin 2x - \sin x = 1 - 2\cos x$ на интервалу $[0, 3\pi)$ је:

А) 6; Б) 5; В) одговор није понуђен; Г) 4; Д) 7; Н) не знам.

11. Ако је $\cos 2\alpha = \frac{23}{25}$, $\alpha \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, онда је $\sin\alpha$ једнако:

А) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$; Б) $\frac{1}{5}$; В) $-\frac{2\sqrt{6}}{5}$; Г) $-\frac{1}{5}$; Д) одговор није понуђен; Н) не знам.

12. Коефицијент уз x^{10} у развоју $\left(x\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)^{10}$ је:

А) одговор није понуђен; Б) 210; В) 45; Г) -45; Д) -120; Н) не знам.

13. Тачка $A(2,4)$ је теме квадрата, а странице BC и CD леже на правама $y + x - 2 = 0$ и $y - x + 2 = 0$. Збир првих координата темена квадрата $ABCD$ где је AC дијагонала квадрата једнак је :

А) 8; Б) 10 ; В) одговор није понуђен; Г) 2; Д) 4; Н) не знам.

14. Збир коефицијената праваца тангенти на хиперболу $16x^2 - 9y^2 = 144$ кроз тачку $A(5,10)$ једнак је :

А) $\frac{49}{20}$; Б) одговор није понуђен; В) $2,5$; Г) $-\frac{5}{4}$; Д) $\frac{4}{5}$; Н) не знам.

15. Ако 4 човека за 5 сати ископа 12 рупа, колико ће сати копати 2 човека 36 рупа?

А) 40; Б) 20 ; В) 15; Г) 25; Д) одговор није понуђен; Н) не знам.

Решење:

1. Факторисањем израза у бројиоцу добијамо једнакости

$$\left(\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{10}+\sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{3})}{\sqrt{2}+1} - 1\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})\cdot\left(\sqrt{5}\left(\sqrt{2}+1\right)+\sqrt{3}\left(\sqrt{2}+1\right)\right)}{\sqrt{2}+1} - 1\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{2}+1} - 1\right)^2 = 1.$$

Тачан одговор је под **Г**.

2. Свођењем израза на заједничке imениоце и даљим сређивањем добијамо

$$\left[\left(b+\frac{1}{a}\right)^2-\left(a+\frac{1}{b}\right)^2\right]:\frac{(1+ab)^2}{a^2b^2}=$$
$$=\left[\left(\frac{ab+1}{a}\right)^2-\left(\frac{ab+1}{b}\right)^2\right]\cdot\frac{a^2b^2}{(ab+1)^2}=$$
$$=(ab+1)^2\cdot\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}\cdot\frac{a^2b^2}{(ab+1)^2}=b^2-a^2.$$

Тачан одговор је под **А**.

3. Пребацивањем на леву страну и сређивањем на заједнички именилац добијамо неједначину $\frac{x^2-3x-28}{x+9}\leq 0$ и за њу следећу табелу. Из табеле видимо да је $x\in(-\infty,-9)\cup[-4,7]$, како је и $x\in N$, добијамо да је $x\in\{1,2,...,7\}$.

Тачан одговор је под **Б**.

		-9		-4		7	
$x^2-3x-28$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$x+9$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
f	$-$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$

4. Из услова задатка добијамо систем једначина за који важи

$$\begin{cases} a_2+a_4=16 \\ a_2\cdot a_5=70 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a_1+d+a_1+3d=16 \\ (a_1+d)\cdot(a_1+4d)=70 \end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases} a_1+2d=8 \\ (a_1+d)\cdot(a_1+4d)=70 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a_1=8-2d \\ (8-d)\cdot(8+2d)=70 \end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases} a_1=8-2d \\ d^2-4d+3=0 \end{cases}.$$

Услов задатка је $d\neq\pm1$ (чланови су несуседни бројеви), па је $d=3$ и $a_1=2$. Тада је збир првих шест чланова аритметичке прогресије $S_6=\frac{6}{2}(2+17)=57$.

Тачан одговор је под **В**.

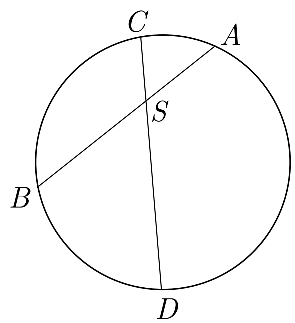
5. Сређивањем једначине добијамо једначину $12(\frac{1}{2}\cdot2^x-4)=16-10\cdot2^x$ тј. $16\cdot2^x=64$ одакле следи $x=2$.

Тачан одговор је под **Д**.

6. Услови задатка су $x^2-7x+12>0$ и $6-2x>0$. Решавањем неједначина добијамо услов $x<3$, антилогаритмовањем добијамо да је $x^2-7x+12>6-2x$ тј. $x^2-5x+6>0$ чије је решење $x\in(-\infty,2)\cup(3,\infty)$. У пресеку са условом задатка добијамо решење $x\in(-\infty,2)$.

Тачан одговор је под **А**.

7. Троуглови ACS и DBS су слични (сл. 84), јер су $\sphericalangle ASC = \sphericalangle DSB$ (унакрсни углови) и $\sphericalangle SAC = \sphericalangle SDB$ (периферијски углови над тетивом BC). Нека је $x = DS$, тада имамо следећу пропорцију $x : 3 = 6 : (11 - x)$ одакле следи $x = 9$ (јер $DS > CS$).



Сл. 84:

Тачан одговор је под **В**.

8. Можемо се ослободити разломка множењем јер је именилац увек позитиван за свако $x \in R$, па добијамо $2x^2 + bx + 8 \geq 10x^2 + 40$ одакле следи $8x^2 - bx + 32 \leq 0$. Како је коефицијент уз најстарији члан последње неједначине, позитиван тада не постоји парабола која је мања или једнака са нулом за свако $x \in R$.

Тачан одговор је под **Г**.

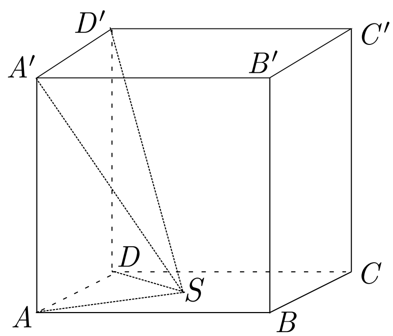
9. Са слике 85 видимо да смо за базу пирамиде изабрали бочну страну $ADD'A'$. Површина квадра је $P = a^2 + 4aH$, заменом познатог добијамо $1000 = 2a^2 + 4a(30 - a) \Rightarrow a^2 - 60a + 500 = 0$, па је $a = 10$ и $H = 20$. Тада је запремина пирамиде $V = \frac{1}{3}aH \cdot \frac{a}{2} = \frac{1000}{3}$.

Тачан одговор је под **А**.

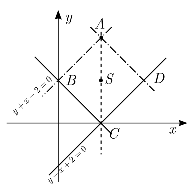
10. Применом адиционе формуле је $2 \sin x \cos x - \sin x = 1 - 2 \cos x$, односно $(2 \cos x - 1)(1 + \sin x) = 0$, па је $\sin x = -1$ или $\cos x = \frac{1}{2}$. Решења наше једначине су $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ или $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$. Ако још додамо и услов задатка да је $x \in [0, 3\pi)$, онда је $x \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right\}$.

Тачан одговор је под **Г**.

11. По формули $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ и услову $\alpha \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ добијамо да је $\sin \alpha = -\sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} = -\frac{1}{5}$.



Сл. 85:



Сл. 86:

Тачан одговор је под **Г**.

12. Коришћењем Њутнове биномне формуле добијамо

$$\left(x\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{10-k}\left(-x^{-1}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}(-1)^{k}x^{15-\frac{5k}{2}}.$$

Како се тражи коефицијент уз x^{10}, онда мора да буде $15-\frac{5k}{2}=10$ одакле следи $k=2$. Тражени коефицијент $\binom{10}{2}(-1)^2=45$.

Тачан одговор је под **В**.

13. Тачка C се добија рашавањем система $y+x-2=0$ и $y-x+2=0$, па је $C(2,0)$ (сл. 86). Средиште $S(2,2)$ дијагонале AC се добија као аритметичка средина крајева. Права на којој лежи друга дијгонала је паралелна са x-осом, па је њена једначина $y=2$, а пресек са BC је тачка $B(0,2)$, а пресек са CD је тачка $D(4,2)$. Збир првих координата темена квадрата $ABCD$ је $2+0+2+4=8$.

Тачан одговор је под **А**.

14. Полуосе хиперболе су $a=3$ и $b=4$, а једначина праве кроз тачку A је $y-10=k(x-5)$, односно $y=kx+10-5k$. Услов додира

је $a^2k^2 - b^2 = n^2$, па заменом добијамо $9k^2 - 16 = (10 - 5k)^2$, односно $4k^2 - 25k + 29 = 0$. Како је дискриминанта позитивна, онда је $k_1 + k_2 = \frac{25}{4}$.

Тачан одговор је под **Б**.

15. Прво попунимо таблицу са одговарајућим бројевима, а онда стављамо стрелице и то супротне код броја сати и број људи јер су то обрнуто пропорционалне вредности, а исте код броја сати и броја рупа јер су то исто пропорционалне вредности. Одатле добијамо једначину $\frac{x}{5} = \frac{4}{2} \cdot \frac{36}{12}$, па је $x = 30$.

људи		сати		рупе	
4	$\downarrow$	5	$\uparrow$	12	$\uparrow$
2		x		36	

Тачан одговор је под **Д**.

Пријемни испит 2014 - тест 5

1. Вредност израза $\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} : \left(\frac{1}{8}\right)^{-2} : 8\right)^{-0,2}$ је:

А) $0,25$; Б) 2; В) $0,5$; Г) 4; Д) 8; Н) не знам.

2. После сређивања израз $\left[\left[\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right]^2 - \frac{2}{ab}\right] : \left[\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right]$, где је $ab \neq 0$, једнак је:

А) $\frac{1}{ab}$; Б) $a+b$; В) $a-b$; Г) $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$; Д) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$; Н) не знам.

3. Решења неједначине $\frac{(x+13)^2}{x^2-4x+3} \leq 0$ која припадају скупу целих бројева $(x \in Z)$ има:

А) 0; Б) 1; В) 2; Г) 3; Д) 4; Н) не знам.

4. За позитиван аритметички низ важи $a_3 + a_7 = 16$, $a_1^2 + a_5^2 = 68$. Тада је a_{2013} дељив са бројем:

А) 3; Б) 7; В) 8; Г) 10; Д) 15; Н) не знам.

5. Једначина $4 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x - 9 \cdot 4^x = 0$ има

А) нула решења; Б) једно позитивно решење; В) једно негативно решење; Г) два решења ; Д) три решења; Н) не знам.

6. Ако је $\log 3 = a$, $\log_3 5 = b$, наћи $\log 45$

А) $\frac{a}{2+b}$; Б) $\frac{2+b}{a}$; В) $2+b$; Г) $a(2-b)$; Д) $a(2+b)$; Н) не знам.

7. Две странице оштроуглог троугла су $5cm$ и $6cm$, а површина му је $12cm^2$. Нумеричка вредност треће странице тог троугла припада интервалу:

А) $[6,7)$; Б) $[7,8)$; В) $[8,9)$; Г) $[9,10]$; Д) $[5,6)$; Н) не знам.

8. Број целобројних вредности параметра b за које је неједначина $(b-3)x^2 + (b-3)x - 2 < 0$ тачна за свако $x \in R$ је:

А) 5; Б) 6; В) 7; Г) 8; Д) 9; Н) не знам.

9. Површина дијагоналног пресека праве правилне четворостране пирамиде једнак је $12\sqrt{2}$ а површина омотача једнака је $16\sqrt{10}$. Запремина те пирамиде једнака је:

А) 32; Б) 24; В) 64; Г) 72; Д) 48; Н) не знам.

10. Ако је $\frac{2\cos\alpha - \sin\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \operatorname{tg}(\alpha + \frac{\pi}{4})$ онда је $\operatorname{tg}\alpha$ једнако:

А) $-\frac{1}{3}$; Б) $\frac{1}{3}$; В) $\frac{1}{5}$; Г) $\frac{1}{7}$; Д) $\frac{1}{9}$; Н) не знам.

11. Вредност израза $\frac{\sqrt{3}}{\sin 800^\circ} + \frac{1}{\sin 550^\circ}$ је:

А) $\frac{1}{2}$; Б) -4; В) 4; Г) -2; Д) 2; Н) не знам.

12. Члан развоја $\left(x^4 - \frac{1}{x}\right)^{20}$ који не садржи x је:
А) 1; Б) 20; В) 190; Г) 4845; Д) 1140; Н) не знам.

13. Решење неједначине $|x+3| + |2-x| \leq 5 - x$ је подскуп скупа:
А) $[0,5]$; Б) $[-2,6]$; В) $[-7,1)$; Г) $[-6,-1]$; Д) $[-3,0)$;
Н) не знам.

14. Ако су $A(1,-1)$, $B(3,1)$ и $C(4,3)$ редом, три тачке паралелограма $ABCD$, збир координата четвртог темена D једнак је:
А) 5; Б) 2; В) 1; Г) 4; Д) 3; Н) не знам.

15. Колико воде треба додати у $200l$ млека са $3,2\%$ млечне масти да би се добило млеко са $0,8\%$ млечне масти (у l)?
А) 600; Б) 500; В) 400; Г) 800; Д) 1000; Н) не знам.

Решења:

1. Свођењем разломака на степене и даљим сређивањем добијамо је

$$\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} : \left(\frac{1}{8}\right)^{-2} : 8\right)^{-0,2} = \left(2^4 \cdot 2^{-6} \cdot 2^{-3}\right)^{-0,2} = \left(2^{-5}\right)^{-0,2} = 2.$$

Тачан одговор је под **Б**.

2. Свођењем на заједничке имениоце добијамо једнакости

$$\left[\left[\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right]^2 - \frac{2}{ab}\right] : \left[\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right] = \left[\left[\frac{a+b}{ab}\right]^2 - \frac{2}{ab}\right] : \frac{a^2+b^2}{ab} =$$
$$= \frac{a^2+2ab+b^2-2ab}{a^2b^2} \cdot \frac{ab}{a^2+b^2} = \frac{1}{ab}.$$

Тачан одговор је под **А**.

3. За неједначину $\frac{(x+13)^2}{x^2-4x+3} \leq 0$ имамо следећу табелу. Из табеле видимо да је $x \in \{-13\} \cup (1,3)$. Како је $x \in Z$ онда је $x \in \{-13, 2\}$.

		-13		1		3	
$(x+13)^2$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^2-4x+3	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$+$	0	$+$	$\vert$	$-$	$\vert$	$+$

Тачан одговор је под **В**.

4. Из поставке задатака добијамо систем једначина за који важе еквиваленције

$$\begin{cases} a_3+a_7=16 \\ a_1^2+a_5^2=68 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1+2d+a_1+6d=16 \\ a_1^2+(a_1+4d)^2=68 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1+4d=8 \\ a_1^2+8^2=68 \end{cases}.$$

Како је наш аритметички низ позитиван добијамо да је $a_1=2$, па је $d=\frac{3}{2}$. Тада је $a_{2013}=a_1+2012d=3020$.

Тачан одговор је под **Г**.

5. Дељењем једначине са 4^x добијамо $4\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-5\left(\frac{3}{2}\right)^{x}-9=0$. Увођењем смене $\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=t$ добијамо $4t^2-5t-9=0$, а њена решења су $t_1=-1$ (ово одбацујемо због услова $t>0$) и $t_2=\frac{9}{4}$, односно $x=2$.

Тачан одговор је под **Б**.

6. Срећивањем $\log_3 5=b$ добијамо $b=\frac{\log 5}{\log 3}=\frac{\log 5}{a}\Rightarrow \log 5=ab$. Онда је $\log 45=\log\left(5\cdot 3^2\right)=\log 5+2\log 3=ab+2a$.

Тачан одговор је под **Д**.

7. Нека су странице $a=5$, $b=6$ и њима захваћен оштар угао γ, тада применом формуле за површину $P=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$ (користи се када су познате две странице), а одатле је $\sin\gamma=\frac{2P}{ab}=\frac{4}{5}$ тј. важи да је $\cos\gamma=+\sqrt{1-\sin^2\gamma}=\frac{3}{5}$ ($+$ јер је γ оштар угао, ставили би $-$ да је био туп угао). По косинусној теореми $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma=25\Rightarrow c=5$.

Тачан одговор је под **Д**.

8. Имамо два случаја:

ако је $b=3$ (тада то није квадратна неједначина) добијамо $-2<0$ што је увек тачно, па је $b=3$ решење првог случаја;

ако је $b\neq 3$ тада за параболу која је увек негативна важе услови $D<0$ (дискриминанта) и $a<0$ (најстарији коефицијент). Заменом добијамо $(b-3)(b+5)<0$ и $b-3<0$, онда је $b>-5$ и $b<3$, па је $b\in(-5,3)$ решење другог случаја;

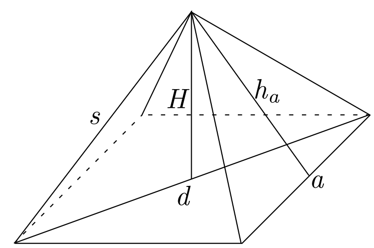
Унија случајева нам даје $b\in(-5,3]$, па су целобројна решења $b\in\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3\}$.

Тачан одговор је под **Г**.

9. Дијагонални пресек је троугао (сл. 87), па важи да је $12\sqrt{2}=\frac{1}{2}dH$ и $d=a\sqrt{2}$, па је $aH=24$. Површина омотача је $16\sqrt{10}=4\cdot\frac{1}{2}\cdot ah_a$, па

је $8\sqrt{10}=a\sqrt{H^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}$, квадрирањем добијамо $640=a^2H^2+\frac{a^4}{4}$, па је $a=4$ и $H=6$. Тада је запремина пирамиде $V=\frac{1}{3}a^2H=32$.

Тачан одговор је под **А**.



Сл. 87:

10. Скрачивањем разломка са $\cos\alpha$ и применом адиционе формуле за збир тангенса добијамо $\frac{2-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+1}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+1}{1-\operatorname{tg}\alpha}$, унакрсним множењем имамо $2-3\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha+2\operatorname{tg}\alpha+1\Rightarrow\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{5}$.

Тачан одговор је под **В**.

11. Синусе у полазном изразу сводимо следећим једнакостима на углове у првом и четвртом кваранту

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin 800^\circ}+\frac{1}{\sin 550^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{\sin(2\cdot 360^\circ+90-10)}+\frac{1}{\sin(360^\circ+180+10)}=$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{\cos 10}+\frac{1}{-\sin 10}=\frac{\sqrt{3}\sin 10-\cos 10}{\sin 10\cos 10}=4\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10-\frac{1}{2}\cos 10}{2\sin 10\cos 10}=$$
$$=4\frac{\cos 30\sin 10-\sin 30\cos 10}{\sin 20}=4\frac{\sin(10-30)}{\sin 20}=-4.$$

Тачан одговор је под **Б**.

12. Користећи Њутнову биномну формулу добијамо да важи

$$\left(x^4-\frac{1}{x}\right)^{20}=\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}\left(x^4\right)^{20-k}\left(-x^{-1}\right)^k=\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}(-1)^k x^{80-5k}.$$

Како се тражи коефицијент који не садржи x , онда $80-5k=0$ тј. $k=16$. Тражени коефицијент $\binom{20}{16}(-1)^{16}=\binom{20}{4}=4845$.

Тачан одговор је под **Г**.

13. Имамо три случаја:

за $x<-3$ добијамо $x\geq -6$, па је $x\in[-6,-3)$;

за $-3\leq x<2$ добијамо $x\leq 0$, па је $x\in[-3,0]$;

за $x \geq 2$ добијамо $x \leq \frac{4}{3}$, па овде немамо решења;

Унија случајева даје нам решење $x \in [-6, 0]$.

Тачан одговор је под **В**.

14. Страница CD је паралелна са AB и садржи тачку C, па је $CD : y - 3 = \frac{1-(-1)}{3-1}(x - 4)$ тј. $y = x - 1$. Аналогно страница AD је паралелна са BC и садржи тачку A, па је једначина праве AD : $y - (-1) = \frac{3-1}{4-3}(x - 1)$ тј. $y = 2x - 3$. Пресек страница CD и AD даје четврто теме D, решавањем система добијамо $D(2, 1)$.

Тачан одговор је под **Д**.

15. Коришћењем табеле добијамо да је однос воде и млека $2.4 : 0.8$, проширивањем добијамо однос $3 : 1$ па одатле закључујемо да нам треба $600l$ воде.

вода	0%	$\searrow$		$\nearrow$	$3.2 - 0.8 = 2.4$	$3 \cdot 200 = 600$
			0.8%			
млеко	3.2%	$\nearrow$		$\searrow$	$0.8 - 0 = 0.8$	$1 \cdot 200 = 200$

Тачан одговор је под **А**.

Пријемни испит 2015 - тест 1

1. Ако је $x = \frac{\left(0.5:1.25+\frac{7}{5}:1\frac{4}{7}-\frac{3}{11}\right)\cdot 3}{\left(1.5+\frac{1}{4}\right):18\frac{1}{3}}$, онда је

А) $x < 0$; Б) $0 \leq x < 10$; В) одговор није понуђен; Г) $20 \leq x < 30$; Д) $30 \leq x$; Н) не знам.

2. Ако је $\log_2 3 = a$ и $\log_5 2 = b$, онда је $\log_{24} 50$ једнако:

А) $\frac{b+1}{b(a+4)}$; Б) $\frac{b+1}{b(a+3)}$; В) $\frac{b+2}{b(a+3)}$; Г) одговор није понуђен; Д) $\frac{b-2}{b(a+4)}$; Н) не знам.

3. Целобројних решења неједначине $\frac{x}{x+4} \leq \frac{1}{x+1}$ има:

А) 5; Б) 3; В) 6; Г) 7; Д) одговор није понуђен; Н) не знам.

4. Збир првог и четвртог члана растуће геометријске прогресије је 35, а збир другог и трећег члана је 30. Пети члан те прогресије припада интервалу:

А) одговор није понуђен; Б) $[41, 52)$; В) $[22, 34)$; Г) $[52, 60)$; Д) $[0, 22)$; Н) не знам.

5. Скуп решења неједначине $\log_{0.5} \frac{2x-4}{x-3} < -2$ је:

А) $(4, \infty)$; Б) $(3, 4)$; В) $(-\infty, 2) \cup (8, \infty)$; Г) одговор није понуђен; Д) $(-\infty, 2) \cup (4, \infty)$; Н) не знам.

6. Скуп свих решења неједначине $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x+3} \leq \left(\sqrt{5}-2\right)^{2/x}$ је:

А) $(-\infty, -2] \cup [-1, \infty)$; Б) $(-\infty, -2] \cup (-1, \infty)$; В) $(-2, -1]$;
Г) $(-\infty, -2] \cup [-1, 0)$; Д) одговор није понуђен; Н) не знам.

7. Дужине основица једнакокраког трапеза су $10cm$ и $6cm$, а краци заклапају угао од $75°$ са већом основицом. Површина тог трапеза (у cm^2) је:

А) $8(\sqrt{2}+\sqrt{3})$; Б) одговор није понуђен; В) $16(2+\sqrt{3})$;
Г) $16(2-\sqrt{3})$; Д) $8(1+\sqrt{2})$; Н) не знам.

8. Вредност реалног параметра b за који је збир квадрата решења једначине $x^2 - bx + b - 3 = 0$ најмањи је:

А) 0; Б) 2 ; В) 4; Г) 1; Д) одговор није понуђен; Н) не знам.

9. Растојање темена B од дијагонале AC' коцке $ABCDA'B'C'D'$ ивице 1 једнако је:

А) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; Б) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; В) $\sqrt{\frac{3}{2}}$; Г) 1; Д) одговор није понуђен; Н) не знам.

10. Број решења једначине $\sin x + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 2x = 0$ на интервалу $[0, 2\pi]$ је:

А) 3; Б) 5; В) одговор није понуђен; Г) 6; Д) 2; Н) не знам.

11. Вредност израза $\frac{1}{\cos 285} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 195}$ је:

А) одговор није понуђен; Б) 4; В) $4\sqrt{3}$; Г) $2\sqrt{2}$; Д) $4\sqrt{2}$; Н) не знам.

12. Праве $x + y = -2$, $x + y = 5$, $3x - 4y = 22$ и координатне осе одређују петоугао. Његова површина припада интервалу:

А) одговор није понуђен; Б) $[41, 52)$; В) $[22, 34)$; Г) $[52, 60)$; Д) $[0, 22)$; Н) не знам.

13. Ако је права $y = kx + n$ заједничка тангента кружнице $x^2 + y^2 = 4$ и елипсе $2x^2 + 5y^2 = 10$, тада је $k^2 + n^2$ једнако:

А) одговор није понуђен; Б) 7; В) 14 Г) 6; Д) 12; Н) не знам.

14. Коефицијент уз x^{20} у полиному $(x^2 - 2x)^{11}$ је:

А) 220; Б) одговор није понуђен; В) 55; Г) -110; Д) -55; Н) не знам.

15. Роба је поскупела за 25%. Да би њена цена била два пута већа од почетне, треба да поскупи још за:

А) 60%; Б) 55%; В) 75%; Г) одговор није понуђен; Д) 50%; Н) не знам.

Решење:

1. Сређивањем израза са десне стране једнакости добијамо да је

$$x = \frac{\left(0.5 : 1.25 + \frac{7}{5} : 1\frac{4}{7} - \frac{3}{11}\right) \cdot 3}{\left(1.5 + \frac{1}{4}\right) : 18\frac{1}{3}} = \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} + \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{11} - \frac{3}{11}\right) \cdot 3}{\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{3}{55}} = \frac{\frac{4 \cdot 11 + 2 \cdot 49 - 3 \cdot 10}{2 \cdot 5 \cdot 11} \cdot 3}{\frac{3 \cdot 2 + 1}{4} \cdot \frac{3}{55}} = \frac{\frac{112}{2}}{\frac{7}{4}} = 32.$$

Тачан одговор је под **Д**.

2. Како је $\log_5 2 = b$ онда је $\log_2 5 = \frac{1}{b}$. Сређивањем израза

$$\log_{24} 50 = \log_{2^3 \cdot 3} (2 \cdot 5^2) = \frac{\log_2 \left(2 \cdot 5^2\right)}{\log_2 (2^3 \cdot 3)} = \frac{\log_2 2 + 2\log_2 5}{3\log_2 2 + \log_2 3} = \frac{1 + \frac{2}{b}}{3 + a} = \frac{b + 2}{b(3 + a)}.$$

Тачан одговор је под **В**.

3. Пребацивањем добијамо $\frac{x}{x+4} - \frac{1}{x+1} \leq 0$, а свођењем на заједнички именилац $\frac{x^2-4}{(x+4)(x+1)} \leq 0$. Формирањем табеле у којој је дат знак имениоца

и знак бројиоца добијамо да је $x \in (-4,-2] \cup (-1,2]$. Додавањем услова $x \in Z$ добијамо да је $x \in \{-3,-2,0,1,2\}$.

		-4		-2		-1		2	
x^2-4	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f	$+$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$-$	0	$+$

Тачан одговор је под **А**.

4. Из поставке задатка добијамо систем једначина за који важи

$$\begin{cases} a_1 + a_4 = 35 \\ a_2 + a_3 = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 q^3 = 35 \\ a_1 q + a_1 q^2 = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1(1+q^3) = 35 \\ a_1 q(1+q) = 30 \end{cases}.$$

Дељењем једначина добијамо $\frac{1-q+q^2}{q} = \frac{7}{6}$, унакрсним множењем и сређивањем имамо да је $6q^2 - 13q + 6 = 0$, па је $q = \frac{3}{2}$, $a_1 = 8$, јер се ради о растућем геометријском низу. На крају $a_5 = a_1 q^4 = \frac{81}{2}$.

Тачан одговор је под **А**.

5. Услов задатка је $\frac{2x-4}{x-3} > 0$ је еквивалентан $x \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$. Како је основа мања од 1 релацијски знак се мења, па имамо да је $\frac{2x-4}{x-3} > (0.5)^{-2}$ одакле следи $\frac{2x-4}{x-3} > 4$ тј. $\frac{8-2x}{x-3} > 0$. Из претходне једначине добијамо $x \in (3,4)$.

Како је $x \in (3,4)$ подскуп услова, онда је то и наше крајње решење.

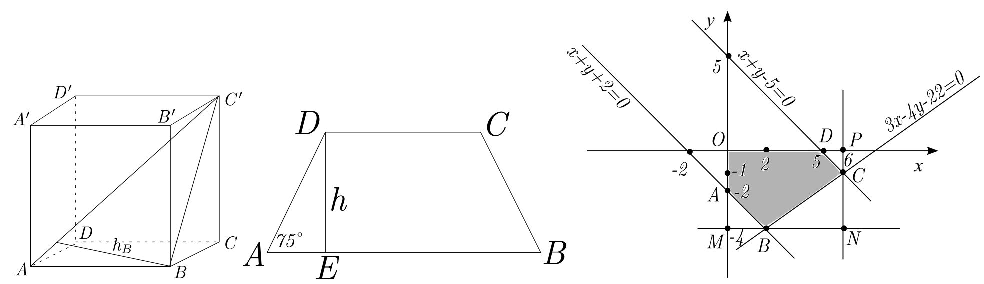
Тачан одговор је под **Б**.

6. Како је $\frac{1}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{5}+2}{5-4} = \sqrt{5}+2$, убацивањем у задатак добијамо $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x+3} \leq \left(\sqrt{5}-2\right)^{2/x}$ одакле следи $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x+3} \leq \left(\sqrt{5}+2\right)^{-2/x}$ тј. $x+3 \leq -\frac{2}{x}$, чијим дређивањем добијамо неједначину $\frac{x^2+3x+2}{x} \leq 0$.

		-2		-1		0	
x^2+3x+2	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f	$-$	0	$+$	0	$-$	$\vert$	$+$

Из табеле видимо да је $x \in (-\infty, -2] \cup [-1, 0)$.

Тачан одговор је под **Г**.



Сл. 88:

7. Нека је E подножје висине из темена D једнакокраког трапеза $ABCD$. Очигледно је $AE = \frac{a-b}{2} = 2$. Тада из правоуглог троугла AED имамо $\operatorname{tg} 75 = \frac{DE}{AE}$ одакле следи

$$h = DE = AE \cdot \operatorname{tg} 75^\circ = 2 \cdot \frac{\sin 75}{\cos 75} =$$
$$= 2\frac{\sqrt{\frac{1-\cos 150}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos 150}{2}}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} = 2(2+\sqrt{3}).$$

Одатле је површина трапеза једнака $P = \frac{a+b}{2}h = 16(2+\sqrt{3})$.

Тачан одговор је под **В**.

8. Из квадратне једначине применом Виетових формула имамо да је $x_1 + x_2 = -\frac{-b}{1} = b$ и $x_1 \cdot x_2 = \frac{b-3}{1} = b-3$. Како се тражи минимална вредност израза $x_1^2 + x_2^2$ који је једнак изразу $(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2$ заменом добијамо $x_1^2 + x_2^2 = b^2 - 2(b-3) = (b-1)^2 + 5$, тако да је минимална вредност 5 када је $b = 1$.

Тачан одговор је под **Г**.

9. Троугао ABC' је правоугли јер је ивица коцке AB нормална на страницу $BCC'B'$ (сл. 88). Тражено растојање је уствари висна из темена B тог троугла. По задатку $AB = 1$, $BC' = \sqrt{2}$ као дијагонала квадтата и $AC' = \sqrt{3}$ као дијагонала коцке. По формулама за површину правоуглог троугла имамо $\frac{AC' \cdot h_B}{2} = \frac{AB \cdot BC'}{2} \Rightarrow h_B = \frac{AB \cdot BC'}{AC'} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Тачан одговор је под **А**.

10. По адиционој формули за двоструки угао добијамо да је полазна једначина еквивалентна $\sin x + \frac{1}{\sqrt{3}} 2 \sin x \cdot \cos x = 0$ одакле следи да важи $\sin x(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \cos x) = 0$ тј. $\sin x = 0 \vee \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ па важи да је $x = k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2m\pi$ за $k, l, m \in Z$. Како $x \in [0, 2\pi]$ добијамо да $x \in \{0, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, 2\pi\}$.

Тачан одговор је под **Б**.

11. Свођењем тригонометријских израза на тригонометријске изразе са угловима у првом квадранту добијамо једнакости:

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{\cos 285}-\tfrac{\sqrt{3}}{\cos 195}=\tfrac{1}{\cos(270+15)}-\tfrac{\sqrt{3}}{\cos(180+15)}=\\&\quad=\tfrac{1}{\sin 15}-\tfrac{\sqrt{3}}{-\cos 15}=\tfrac{\cos 15+\sqrt{3}\sin 15}{\sin 15\cdot\cos 15}=\\&\quad=4\tfrac{\frac{1}{2}\cos 15+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 15}{2\sin 15\cdot\cos 15}=4\tfrac{\sin 30\cos 15+\cos 30\sin 15}{\sin 30}=\\&\quad=4\tfrac{\sin 45}{\sin 30}=4\tfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}=4\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Тачан одговор је под **Д**.

12. Темена петоугла $OABCD$ добијамо на следећи начин: Теме $A(0,-2)$ добијамо у пресеку праве $x+y=-2$ и $y-$осе, теме $B(2,-4)$ добијамо у пресеку правих $x+y=-2$ и $3x-4y=22$, теме $C(6,-1)$ добијамо у пресеку правих $3x-4y=22$ и $x+y=5$, теме $D(5,0)$ добијамо у пресеку праве $x+y=5$ и $x-$осе. Правоугаоник $OMNP$ добијамо када кроз теме B повучемо паралелу са $x-$осом и кроз теме C повучемо паралелу са $y-$осом. (као на слици 88)

Тада се површина петоугла добија када оп површине правоугаоника одузмемо површине троугла AMB, BNC и CPD, тј.

$$\begin{aligned}&P_{OABCD}=P_{OMNP}-P_{AMB}-P_{BNC}-P_{CPD}=\\&\quad=6\cdot 4-\tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2-\tfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 3-\tfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=24-2-6-\tfrac{1}{2}=\tfrac{31}{2}.\end{aligned}$$

Тачан одговор је под **Д**.

13. Кружница $x^2+y^2=4$ са центром у тачки $(0,0)$ и полупречник $r=2$, а елипса $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{2}=1$ са центром у тачки $(0,0)$ и полуосе $a=\sqrt{5}$ и $b=\sqrt{2}$. Услов да права $y=kx+n$ додирује кружницу је $(kp-q+n)^2=r^2(k^2+1)$, а елипсу $a^2k^2+b^2=n^2$. Заменом познатих вредности добијамо $n^2=4(k^2+1)$ и $5k^2+2=n^2$, изједначавањем имамо $5k^2+2=4k^2+4$ одакле следи $k^2=2,\ n^2=12$.

Тачан одговор је под **В**.

14. Биномни развој степена бинома даје

$$\begin{aligned}&(x^2-2x)^{11}=\sum_{k=0}^{11}\binom{11}{k}(x^2)^{11-k}(-2x)^k=\\&\quad=\sum_{k=0}^{11}\binom{11}{k}x^{22-2k}(-2)^k x^k=\sum_{k=0}^{11}\binom{11}{k}(-2)^k x^{22-k}.\end{aligned}$$

Пошто се тражи коефицијент уз x^{20}, добијамо да је $22 - k = 20$ тј. $k = 2$. Одатле закључујемо да је тражени коефицијент једнак

$$\binom{11}{2}(-2)^2 = \tfrac{11\cdot 10}{2}4 = 220.$$

Тачан одговор је под **A**.

15. Цена робе након првог поскупљења је $x \cdot (1 + \frac{25}{100})$, односно $\frac{5}{4}x$, где је x првобитна цена. Нека је p повечање у процентима да добијемо дуплу цену, тада $\frac{5}{4}x(1 + \frac{p}{100}) = 2x$, сређивањем добијамо $1 + \frac{p}{100} = \frac{8}{5}$, па је $p = 60\%$.

Тачан одговор је под **A**.

Пријемни испит 2015 - тест 2

1. Вредност израза $\left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2+\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ једнака је:

А) 4; Б) 2; В) одговор није понуђен; Г) $\sqrt{6}+\sqrt{5}$; Д) $2\sqrt{6}$; Н) не знам.

2. Вредност израза $\log_{1/8}\left(\log_{\sqrt{6}}2-2\log_{1/6}3\right)$ је:

А) $-\frac{1}{3}$; Б) $-\frac{1}{2}$; В) $\frac{1}{2}$; Г) одговор није понуђен; Д) 2; Н) не знам.

3. Целобројних решења неједначине $\frac{3x^2-6x-1}{x^2-x+2}\leq 2$ има:

А) 5; Б) 8; В) 6; Г) 7; Д) одговор није понуђен; Н) не знам.

4. Неки чланови аритметичких прогресија $17, 21, 25, 29, ...$ и $16, 21, 26, ...$ једнаки су међу собом. Тада збир првих педесет једнаких чланова датих прогресија је:

А) 25020; Б) 20500; В) 24050; Г) одговор није понуђен; Д) 25550; Н) не знам.

5. Скуп решења неједначине $\log_x(4-x^2)<2$ је:

А) $(0,1)\cup\left(\sqrt{2},2\right)$; Б) $(0,1)$; В) $(0,1)\cup\left(1,\sqrt{2}\right)$; Г) одговор није понуђен; Д) $\left(\sqrt{2},2\right)$; Н) не знам.

6. Решење једначине $2^{16^x}=16^{2^x}$ припада интервалу:

А) $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$; Б) $\left(\frac{13}{18},\frac{5}{6}\right]$; В) $\left(\frac{11}{20},\frac{13}{18}\right]$; Г) $\left(\frac{5}{6},5\right]$; Д) одговор није понуђен; Н) не знам.

7. Основица једнакокраког троугла је $\sqrt{2}cm$. Тежишне дужи које су повучене на краке секу се под правим углом.
Површина тог троугла (у cm^2) је:

А) 2.5; Б) одговор није понуђен; В) 2; Г) 3.5; Д) 1.5; Н) не знам.

8. За колико целобројних вредности параметра a је $(a+3)x^2-(a+3)x-2<0$ за свако $x\in R$:

А) 8; Б) 7 ; В) 9; Г) 11; Д) одговор није понуђен; Н) не знам.

9. У зарубљену купу полупречника веће основе 4, уписана је лопта запремине 36π. Запремина зарубљене купе је:

А) одговор није понуђен; Б) $\frac{239\pi}{4}$; В) $\frac{359\pi}{6}$; Г) $\frac{298\pi}{5}$; Д) $\frac{481\pi}{8}$; Н) не знам.

10. Нека је x оштар угао. Скуп решења неједначине $\sin x + \sqrt{3}\cos x \geq \sqrt{3}$ је интервал:

А) $[0, \frac{\pi}{3}]$; Б) $[0, \frac{\pi}{6}]$; В) одговор није понуђен; Г) $(0, \frac{\pi}{4}]$; Д) $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$; Н) не знам.

11. Ако је $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{a}{b}}$, $(a > 0,\ b > 0,\ a \neq b)$, тада је $\sin x$ једнак:

А) $\frac{a+b}{a-b}$; Б) $\frac{b-a}{b+a}$; В) $\sqrt{b} - \sqrt{a}$; Г) $\frac{1}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$; Д) одговор није понуђен; Н) не знам.

12. Целобројних решења неједначине $x + 1 > \sqrt{5 - x}$ има:

А) 1; Б) 5; В) 2; Г) одговор није понуђен; Д) 0; Н) не знам.

13. Дата је тачка $S\,(1, 1)$ и елипса $9x^2 + 16y^2 = 144$. Једначина сечице елипсе којој је средиште тачка S, гласи:

А) одговор није понуђен; Б) $16x + 9y = 25$; В) $3x + 4y = 7$; Г) $9x + 16y = 25$; Д) $4x + 3y = 7$; Н) не знам.

14. Ако је $x > 0$, колико процената од x је израз $\frac{x}{50} + \frac{x}{25}$?

А) 75%; Б) 6%; В) 25%; Г) 12%; Д) одговор није понуђен; Н) не знам.

15. Ако је остатак при дељењу полинома $x^4 + 2x^3 + x^2 + ax + b$ са полиномом $x^2 + x + 1$ једнак $2x + 3$, онда $2a + b$ припада интервалу:

А) одговор није понуђен; Б) $[6, 8)$; В) $[0, 2)$ Г) $[4, 6)$; Д) $[2, 4)$; Н) не знам.

Решења:

1. Користећи чињеницу да је $\left(1 - \sqrt{5}\right)^2 = 6 - 2\sqrt{5}$ и $\left(1 + \sqrt{5}\right)^2 = 6 + 2\sqrt{5}$ полазни израз је једнак

$$\left(\sqrt{\left(1 - \sqrt{5}\right)^2} - \sqrt{\left(1 + \sqrt{5}\right)^2}\right)^2 + \sqrt{\left(1 - \sqrt{5}\right)^2} - \sqrt{\left(1 + \sqrt{5}\right)^2} =$$
$$= \left(\sqrt{5} - 1 - 1 - \sqrt{5}\right)^2 + \sqrt{5} - 1 - 1 - \sqrt{5} = 4 - 2 = 2.$$

Тачан одговор је под **Б**.

2. Користећи основне особине логаритама добијамо да важе једнакости

$$\log_{1/8}\left(\log_{\sqrt{6}} 2 - 2\log_{1/6} 3\right) = \log_{2^{-3}}\left(\log_{6^{1/2}} 2 - 2\log_{6^{-1}} 3\right) =$$
$$= \frac{1}{-3}\log_2\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\log_6 2 - \frac{2}{-1}\log_6 3\right) = -\frac{1}{3}\log_2\left(\log_6 2^2 + \log_6 3^2\right) =$$
$$= -\frac{1}{3}\log_2\left(\log_6\left(2^2 3^2\right)\right) = -\frac{1}{3}\log_2\left(2\log_6 6\right) = -\frac{1}{3}.$$

Тачан одговор је под **А**.

3. Пребацивањем добијамо $\frac{3x^2-6x-1}{x^2-x+2} - 2 \leq 0$, а свођењем на заједнички именилац $\frac{x^2-4x-5}{x^2-x+2} \leq 0$

		-1		5	
x^2-4x-5	$+$	0	$-$	0	$+$
x^2-x+2	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
f	$+$	0	$-$	0	$+$

Из табеле видимо да је $x \in [-1,5]$, ако још додамо услов да је $x \in Z$ онда је $x \in \{-1,0,1,2,3,4,5\}$.

Тачан одговор је под **Г**.

4. Из аритметичке прогресије $17, 21, 25, 29, ...$ добијамо да је $a_1 = 17$ и $d = 4$, а из аритметичке прогресије $16, 21, 26, ...$добијамо да је $b_1 = 16$ и $d = 5$, видимо да је први заједнички члан $c_1 = 21$ и да је $d = 20$. Тада је $S_{50} = \frac{50}{2}(2 \cdot 21 + 49 \cdot 20) = 25550$.

Тачан одговор је под **Д**.

5. Услов аргумента је $4 - x^2 > 0$, тј. $|x| < 2$. Како је основа променљива, имамо два случаја, ако је $x \in (0,1)$ добијамо $4 - x^2 > x^2$, па је $|x| < \sqrt{2}$, па је решење првог случаја $x \in (0,1)$. Други случај је за $x \in (1,2)$, добијамо $4-x^2 < x^2$, па је $|x| > \sqrt{2}$, па је решење првог случаја $x \in (\sqrt{2},2)$. Унија случејева даје нам крајње решење $x \in (0,1) \cup (\sqrt{2},2)$.

Тачан одговор је под **А**.

6. Свођењем на исте основе из полазне добијамо еквивалентну једначину $2^{16^x} = (2^4)^{2^x}$ тј. $2^{16^x} = 2^{4 \cdot 2^x}$, па је $16^x = 4 \cdot 2^x$. Из претходне једначине добијамо $2^{4x} = 2^{2+x}$, одатле је $4x = 2 + x$, па је $x = \frac{2}{3}$.

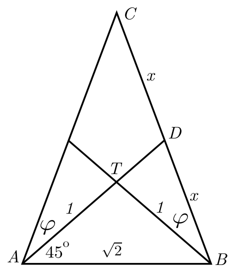
Тачан одговор је под **В**.

7. Очигледно је $AT = BT = 1$ јер је троугао ABT једнакокрако правоугли (сл. 89). Нека је $BD = DC = x$ и $\sphericalangle CAD = \sphericalangle TBD = \varphi$, па је $TD = \sqrt{x^2-1}$ и $\cos\varphi = \frac{1}{x}$. Применом косинусне теореме на троугао ADC добијамо

$$x^2 = \left(1 + \sqrt{x^2-1}\right)^2 + (2x)^2 - 2 \cdot 2x\sqrt{x^2-1} \cdot \cos\varphi.$$

Решавањем једначине добијамо да је $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$. За висину једнакостраничног троугла важи $h = \sqrt{(2x)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$, па је површина троугла једнака

$P=\frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{3}{2}\sqrt{2}=\frac{3}{2}$.



Сл. 89: Једнакокраки троугао чија је основа $\sqrt{2}cm$.

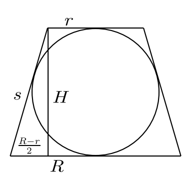
Тачан одговор је под **Д**.

8. Како је квадратна функција негативна за свако $x \in R$, тада мора да важи $a+3<0$ и $(a+3)^2-4(a+3)(-2)<0$. Решавањем неједначина добијамо $a<-3$ и $(a+3)(a+11)<0$ одакле следи да $a \in (-11,-3)$. У задатку није наглашено да се ради о квадратној неједначини, па морамо да проверимо и случај када је $a=-3$ (коефицијент уз квадратни члан једнак нули), заменом у неједначину добијамо $-2<0$ што је увек тачно. Закључујемо да је решење неједначине $a \in (-11,-3]$. Целобројна решења су $a \in \{-10,-9,...,-4,-3\}$.

Тачан одговор је под **А**.

9. Осни пресек зарубљене купе (сл. 90) и уписане лопте је једнакокраки трапез (тангентни четвороугао $2R+2r=2s$ тј. $r=s-4$) са уписаном кружницом. Запремина лопте је $V=\frac{4}{3}\left(\frac{H}{2}\right)^3\pi=36\pi$ одакле следи $H=6$. Из правоуглог троугла имамо $(\frac{2R-2r}{2})^2+H^2=s^2$ одакле добијамо да је $s=\frac{25}{4}$ и $r=\frac{9}{4}$.

Запремина зарубљене купе је $V=\frac{H\pi}{3}\left(R^2+Rr+r^2\right)=\frac{481\pi}{8}$.



Сл. 90:

Тачан одговор је под **Д**.

10. Дату неједначину поделимо са 2 па добијамо $\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$, односно $\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin x+\sin\frac{\pi}{3}\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ одакле следи $\sin(x+\frac{\pi}{3}) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ па је $\frac{\pi}{3}+2k\pi \leq x+\frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3}+2k\pi$ тј. $2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3}+2k\pi$. Како је x оштар угао важи $0 < x < \frac{\pi}{2}$, па је решење $0 < x \leq \frac{\pi}{3}$.

Тачан одговор је под **В**.

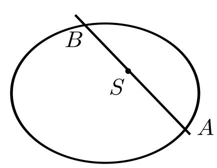
11. Применом адиционе формуле добијамо $\frac{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ одакле следи да је $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$. По формули $\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{b-a}{b+a}$.

Тачан одговор је под **Б**.

12. Неједначина је еквивалентна систему неједначина $5-x \geq 0$ и $x+1 \geq 0$ и $(x+1)^2 > 5-x$, што је еквивалентно систему $x \in [-1,5]$ и $x^2+3x-4>0$. Пресеком добијамо решење $x \in (1,5]$.

Тачан одговор је под **Г**.

13. Једначина праве кроз тачку S (сл. 91) је $y-1=k(x-1)$ тј. $y=kx-k+1$. Из једначине елипсе добијамо $9x^2+16(kx-k+1)^2=144$ па је $(16k^2+9)x^2+(-32k^2+32k)x+16k^2-32k-128=0$. Како је тачка S средиште сечице AB тада важи $\frac{x_A+x_B}{2}=x_s$ и $\frac{y_A+y_B}{2}=x_s$, па по Вијетовим формулама имамо $\frac{32k^2-32k}{16k^2+9}=2$ одакле следи $k=-\frac{9}{16}$. Тражена сечица је $9x+16y=25$.



Сл. 91:

Тачан одговор је под **Г**.

14. Претпоставимо да је одговор p процената. Тражена пропорција је $x:\left(\frac{x}{50}+\frac{x}{25}\right)=100:p$, сређивањем добијамо $\frac{50}{3}=\frac{100}{p}$ одакле следи $p=6$.

Тачан одговор је под **Б**.

15. По теореми о разлагању полинома имамо

$$x^4+2x^3+x^2+ax+b=(x^2+x+1)(x^2+Ax+B)+2x+3.$$

Изједначавањем коефицијената уз исте степене добијамо следећи систем једначина $\begin{cases} 2 = A + 1 \\ 1 = B + A + 1 \\ a = B + A + 2 \\ b = B + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$ па је $2a + b$=6.

Тачан одговор је под **Б**.

Пријемни испит 2015 - тест 3

1. Након срeђивања израз $\left[\left(\sqrt{\frac{7}{8}}-\sqrt{\frac{8}{7}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{4}{5}}-\sqrt{\frac{5}{4}}\right)\cdot\sqrt{70}\right]^{-\frac{1}{2}}$ једнак је:

А) 4; Б) 1; В) одговор није понуђен; Г) 2; Д) $\frac{1}{4}$; Н) не знам.

2. Након сређивања израз $\frac{1}{(a+b)^2-a^2-ab-2b^2}\cdot\left(\frac{a^2+ab}{a+b}-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^{-1}-b:\left(\frac{a}{b}+1\right)\right)$, $ab\neq 0\wedge a^2\neq b^2$ једнак је

А) $\frac{1}{b}$; Б) $a+b$; В) $\frac{1}{a+b}$; Г) одговор није понуђен; Д) $\frac{1}{a}$; Н) не знам.

3. Коефицијент уз x^{16} степена бинома $\left(2x^2+\frac{1}{2}x\right)^{11}$ је:

А) 231; Б) 693; В) 462; Г) 262; Д) одговор није понуђен; Н) не знам.

4. Збир решења једначине $2\cdot 16^x-5\cdot 12^x+2\cdot 9^x=0$ је:

А) одговор није понуђен; Б) 0; В) 2; Г) $\frac{1}{2}$; Д) $-\frac{1}{2}$; Н) не знам.

5. Ако је $f\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=(x+1)^2$, тада је $f(2)$ једнако:

А) 6; Б) 1; В) 16; Г) одговор није понуђен; Д) 4; Н) не знам.

6. Број решења једначине $\sqrt{2}\cos^4 x-\sqrt{2}\sin^4 x=1$ на интервалу $[-\pi,\pi]$ је:

А) 1; Б) 2; В) 3; Г) 4; Д) одговор није понуђен; Н) не знам.

7. Вредност израза $\sin\frac{7\pi}{12}+\cos\frac{7\pi}{12}$ је:

А) $\frac{3}{\sqrt{2}}$; Б) одговор није понуђен; В) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; Г) $\frac{1}{2}$; Д) 1; Н) не знам.

8. Ако је девети члан аритметичке прогресије за 24 већи од петог и ако је збир деветог и седмог члана 86, тада је седамнаести члан прогресије једнак:

А) 103; Б) 99 ; В) 89 ; Г) 97; Д) одговор није понуђен; Н) не знам.

9. У једном одељењу има 3 пута више дечака од девојчица. Међу девојчицама је 20% одличних а међу дечацима 10%. Колико процената одлличних ђака има у целом разреду?

А) 17%; Б) 15%; В) 17.5%; Г) одговор није понуђен; Д) 12.5%; Н) не знам.

10. Скуп решења неједначине $\log_{\frac{1}{3}}(2x+3) \geq \log_3(3x+2)$ је интервал $(a,b]$. Тада је $\frac{1}{ab}$ једнако:

А) 3; Б) -3; В) одговор није понуђен; Г) $\frac{1}{3}$; Д) $-\frac{1}{3}$;
Н) не знам.

11. Дат је трапез $ABCD$ са правим угловима у теменима B и C, и нека је D_1 подножје висине из темена D. Ако је $P_{\triangle AD_1D} = 2$, $P_{ABCD} = 14$ и $DD_1 = 4$ тада је збир квадрата страница једнак:

А) 39; Б) одговор није понуђен; В) 53 ; Г) 50 ; Д) 47;
Н) не знам.

12. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ у коју је уписана лопта а у ту лопту је уписана коцка $EFGHE_1F_1G_1H_1$. Однос $AD_1 : EF_1$ је једнак.

А) $4\sqrt{3} : 1$; Б) $2 : 1$; В) $\sqrt{3} : 1$; Г) одговор није понуђен;
Д) $3\sqrt{3} : 1$; Н) не знам.

13. Дата су два круга полупречника 8 cm који се додирују. Колики је полупречник круга који споља додирује 2 дата круга и њихову заједничку спољашњу тангенту?

А) 4cm; Б) 3 cm; В) одговор није понуђен; Г) 2 cm; Д) $\sqrt{2}$cm;
Н) не знам.

14. Једначина $2x - 3 = \sqrt{3x-2}$:

А) нема решења; Б) одговор није понуђен; В) има тачно једно решење; Г) има два позитивна решења; Д) има два решења од којих је једно позитивно; Н) не знам.

15. Производ целобројних вредности параметра m таквих да неједнакост $(m+1)x^2 - 2(m+7)x - (m+7) > 0$ важи за свако x је:

А) 30; Б) -120; В) 840; Г) одговор није понуђен; Д) 10;
Н) не знам.

Решење:

1. Свођењем на заједничке имениоце и даљим сређивањем добијамо једнакости

$$\left[\left(\sqrt{\tfrac{7}{8}} - \sqrt{\tfrac{8}{7}}\right) \cdot \left(\sqrt{\tfrac{4}{5}} - \sqrt{\tfrac{5}{4}}\right) \cdot \sqrt{70}\right]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{7}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}\right) \cdot \sqrt{70}\right]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[\left(\frac{\sqrt{7^2}-\sqrt{8^2}}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{7}} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{4^2}-\sqrt{5^2}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}} \right) \cdot \sqrt{70} \right]^{-\frac{1}{2}} =$$
$$= \left[\left(\frac{7-8}{\sqrt{56}} \right) \cdot \left(\frac{4-5}{\sqrt{20}} \right) \cdot \sqrt{70} \right]^{-\frac{1}{2}} =$$
$$= \left[\left(\frac{(-1)(-1))}{\sqrt{1120}} \right) \cdot \sqrt{70} \right]^{-\frac{1}{2}} =$$
$$= \left[\left(\frac{1}{\sqrt{16}} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{4} \right]^{-\frac{1}{2}} = 2.$$

Тачан одговор је под **Г**.

2. Свођењем на заједничке имениоце и даљим сређивањем добијамо једнакости

$$\frac{1}{(a+b)^2-a^2-ab-2b^2} \cdot \left(\frac{a^2+ab}{a+b} - \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^{-1} - b : \left(\frac{a}{b}+1\right) \right) =$$
$$= \frac{1}{(a+b)^2-a^2-ab-2b^2} \cdot \left(\frac{a^2+ab}{a+b} - \left(\frac{b+a}{ab}\right)^{-1} - b : \frac{a+b}{b} \right) =$$
$$= \frac{1}{a^2+2ab+b^2-a^2-ab-2b^2} \cdot \left(\frac{a^2+ab}{a+b} - \frac{ab}{a+b} - b \cdot \frac{b}{a+b} \right) =$$
$$= \frac{1}{ab-b^2} \cdot \left(\frac{a^2+ab}{a+b} - \frac{ab}{a+b} - b \cdot \frac{b}{a+b} \right) =$$
$$= \frac{1}{ab-b^2} \cdot \left(\frac{a^2+ab-ab-b^2}{a+b} \right) =$$
$$= \frac{1}{ab-b^2} \cdot \left(\frac{a^2-b^2}{a+b} \right) = \frac{(a+b)(a-b)}{b(a-b)(a+b)} = \frac{1}{b},$$

ако је $ab \neq 0 \wedge a^2 \neq b^2$.

Тачан одговор је под **А**.

3. Користећи Њутнову биномну формулу

$$\left(2x^2 + \frac{1}{2}x\right)^{11} = \sum_{k=0}^{11} \binom{11}{k} \left(2x^2\right)^{11-k} \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)^k$$

Општи члан је облика

$$\binom{11}{k} \left(2x^2\right)^{11-k} \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)^k = \binom{11}{k} 2^{11-k} x^{22-2k} \cdot 2^{-k} \cdot x^k = \binom{11}{k} 2^{11-2k} x^{22-k}.$$

Сада треба одредити k из услова задатка $x^{16} = x^{22-k}$. Очигледно да se k добија решавањем једначине $22-k=16$, одакле следи да је $k=6$. Ако k уврстимо у општи члан добијамо $\binom{11}{6} 2^{11-2\cdot6} x^{22-6} = \binom{11}{6} 2^{-1} x^{16}$. Одатле следи да је коефицијент уз x^{16} једнак $\binom{11}{6} 2^{-1} = 231$.

Тачан одговор је под **А**.

4. Једначина $2 \cdot 16^x - 5 \cdot 12^x + 2 \cdot 9^x = 0$ је еквивалентна једначини $2 \cdot (4^2)^x - 5 \cdot (3 \cdot 4)^x + 2 \cdot (3^2)^x = 0$. Дељењем једначине са 3^{2x} добијамо еквивалентну једначину $2\left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - 5\left(\frac{4}{3}\right)^x + 2 = 0$. Сменом $\left(\frac{4}{3}\right)^x = t$ добијамо квадратну једначину $2t^2 - 5t + 2 = 0$. Решавањем квадратне једначине добијамо да је $t = 2$ или $t = \frac{1}{2}$. Одатле је $\left(\frac{4}{3}\right)^x = 2$ или $\left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{1}{2}$. Решавањем датих једначина добијамо да је $x = \log_{\frac{4}{3}} 2$ или $x = \log_{\frac{4}{3}} \frac{1}{2}$. Одатле следи да је збир решења полазне једначине $2 \cdot 16^x - 5 \cdot 12^x + 2 \cdot 9^x = 0$ једнак $\log_{\frac{4}{3}} 2 + \log_{\frac{4}{3}} \frac{1}{2} = \log_{\frac{4}{3}} 2 \cdot \frac{1}{2} = \log_{\frac{4}{3}} 1 = 0$.

Тачан одговор је под **Б**.

5. Ако је $f\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = (x+1)^2$, тада треба одредити за које x је вредност аргумента функције једнака 2 што постижемо решавањем једначине $\frac{x+1}{x+2} = 2$. Та једначина је еквивалентна $\frac{x+1}{x+2} - 2 = 0$ тј. $\frac{x+1}{x+2} - \frac{2x+4}{x+2} = 0$. Даљим сређивањем добијамо еквиалентну једначину $\frac{-x-3}{x+2} = 0$ чије је решење $x = -3$. Одавде је $f(2) = f\left(\frac{-3+1}{-3+2}\right) = (-3+1)^2 = 4$.

Тачан одговор је под **Д**.

6. Полазна једначина је еквивалентна $\sqrt{2}(\cos^4 x - \sin^4 x) = 1$ тј. $\sqrt{2}(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = 1$ одакле следи $\sqrt{2}(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1$. Ова једначина је еквивалентна $\sqrt{2} \cos 2x = 1$ тј. $\cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ чија су решења $2x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ тј. после дељења са 2 $x = \pm\frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Непосредном провером се добија да су на интервалу $[-\pi, \pi]$ само решења $\frac{\pi}{8}$, $-\frac{\pi}{8}$, $\frac{7\pi}{8}$ и $-\frac{7\pi}{8}$.

Тачан одговор је под **Г**.

7. Вредност израза $\sin\frac{7\pi}{12} + \cos\frac{7\pi}{12}$ можемо израчунати на неколико начина. Први начин је да $\frac{7\pi}{12}$ запишемо као $\frac{3+4}{12}\pi = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$. Одатле добијамо да је

$$\begin{aligned}
&\sin\tfrac{7\pi}{12} + \cos\tfrac{7\pi}{12} = \sin\left(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi}{3}\right) = \\
&\quad = \sin\tfrac{\pi}{4}\cos\tfrac{\pi}{3} + \cos\tfrac{\pi}{4}\sin\tfrac{\pi}{3} + \cos\tfrac{\pi}{4}\cos\tfrac{\pi}{3} - \sin\tfrac{\pi}{4}\sin\tfrac{\pi}{3} = \\
&\quad = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\tfrac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2}\tfrac{1}{2} = \tfrac{\sqrt{2}}{2} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Други начин је да израз $\cos\frac{7\pi}{12}$ запишемо као $\sin\left(\frac{7\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{13\pi}{12}$. Користећи $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, добијамо да је

$$\begin{aligned}
&\sin\tfrac{7\pi}{12} + \cos\tfrac{7\pi}{12} = \sin\tfrac{7\pi}{12} + \sin\tfrac{13\pi}{12} = \\
&\quad = 2\sin\tfrac{10\pi}{12}\cos\tfrac{-6\pi}{24} = 2\sin\tfrac{5\pi}{6}\cos\tfrac{-\pi}{4} = \\
&\quad = 2\sin\tfrac{5\pi}{6}\cos\tfrac{\pi}{4} = 2\sin\tfrac{5\pi}{6}\tfrac{\sqrt{2}}{2} = \\
&\quad = \sqrt{2}\sin\tfrac{5\pi}{6} = \sqrt{2}\sin(\tfrac{\pi}{6}) = \sqrt{2}\tfrac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Тачан одговор је под **В**.

8. Ако је девети члан аритметичке прогресије за 24 већи од петог то можемо записати као $a_9 = a_5 + 24$, тј. као $a_1 + 8d = a_1 + 4d + 24$. Одавде добијамо да је $8d = 4d + 24 \Leftrightarrow 4d = 24 \Leftrightarrow d = 6$. Ако је збир деветог и седмог члана једнак 86, онда то можемо записати као $a_9+a_7 = 86$, тј. као $a_1+8d+a_1+6d = 86 \Leftrightarrow 2a_1+14\cdot 6 = 86 \Leftrightarrow 2a_1 = 86-84 \Leftrightarrow 2a_1 = 2 \Leftrightarrow a_1 = 1$. Седамнаести члан $a_{17} = a_1 + 16d = 1 + 16 \cdot 6 = 97$.

Тачан одговор је под **Г**.

9. Нека је број дечака у разреду x, а број девојчица y, и нека је број одличних дечака x_1, а број одличних девојчица y_1. Тада из услова задатка видимо да је $x = 3y$, $x_1 = \frac{1}{10}x$ и $y_1 = \frac{1}{5}y$. Тражени проценат одређујемо као
$\frac{x_1+y_1}{x+y} \cdot 100 = \frac{\frac{1}{10}x+\frac{1}{5}y}{x+y} \cdot 100 = \frac{\frac{3}{10}y+\frac{1}{5}y}{3y+y} \cdot 100 = \frac{\frac{5}{10}y}{4y} \cdot 100 = \frac{5}{40} \cdot 100 = 12,5\%$.

Тачан одговор је под **Д**.

10. Да би смо решили неједначину прво морамо да логаритме сведемо на исте основе. Тако је

$$\log_{\frac{1}{3}}(2x+3) \geq \log_3(3x+2) \Leftrightarrow -\log_3(2x+3) \geq \log_3(3x+2).$$

Претходна неједначина је еквивалентна $\log_3(3x+2)+\log_3(2x+3) \leq 0$, која је еививалентна неједначини $(3x+2)(2x+3) \leq 1$ уз услове $3x+2 > 0$ и $2x+3 > 0$. Прва неједначина је еквивалентна квадратној неједначини $6x^2 + 13x + 5 \leq 0$ чији је скуп решења $x \in [-\frac{5}{3}, -\frac{1}{2}]$. Решења друге две неједначине су, редом, $x > -\frac{2}{3}$ односно $x > -\frac{3}{2}$. Пресек скупова даје решење неједначине $x \in \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right]$. Одавде је $a = -\frac{2}{3}$ а $b = -\frac{1}{3}$, одакле следи да је $\frac{1}{ab} = \frac{1}{(-\frac{2}{3})(-\frac{1}{2})} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$.

Тачан одговор је под **А**.

11. Из поставке задатка имамо да је $P_{\triangle AD_1D} = 2 = \frac{a\cdot h}{2} = \frac{AD_1\cdot DD_1}{2}$. Одавде је $AD_1 = \frac{4}{DD_1} = \frac{4}{4} = 1$. Са друге стране површина $P_{ABCD} = P_{\triangle AD_1D}+P_{D_1BCD}$. Други сабирак представља површину правоугаоника одређеног теменима D_1, B, C и D, и за коју важи да је једнака $P_{D_1BCD} = P_{ABCD} - P_{\triangle AD_1D} = 14 - 2 = 12$. Са друге стране важи да је $P_{D_1BCD} = D_1B \cdot BC = D_1B \cdot DD_1$ одакле следи $12 = D_1B \cdot 4$ тј. $3 = D_1B$. Како је $AB = AD_1 + D_1B$ то је $AB = 1 + 3 = 4$ и $CD = 3$. Остало је још да одредимо дужину странице AD коју одређујемо из чињенице да она представља хипотенузу правоуглог троугла $\triangle AD_1D$, чије су катете

$AD_1 = 1$ и $DD_1 = 4$, па је $AD^2 = AD_1^2 + DD_1^2 = 1 + 16 = 17$. Збир квадрата страница једнак је $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 4^2 + 4^2 + 3^2 + 17 = 58$.

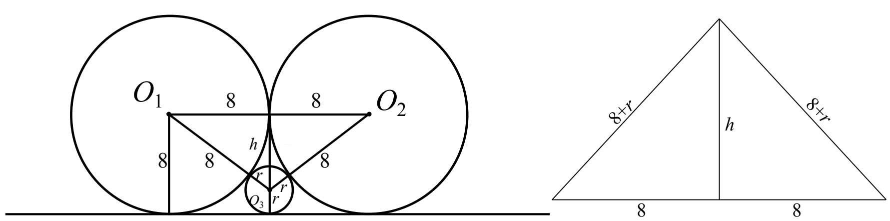
Тачан одговор је под **Б**.

12. На основу поставке задатка видимо да је велика дијагонала коцке $EFGHE_1F_1G_1H_1$ заправо страница коцке $ABCDA_1B_1C_1D_1$. То онда значи да је $AC : EG_1 = AC : AC_1 = \sqrt{3}AC_1 : AC_1 = \sqrt{3}$. На основу сличности троуглова $AB : EF = \sqrt{3} : 1$ и $AA_1 : FF_1 = \sqrt{3} : 1$, па закључујемо да су троуглови AA_1D_1 и EFF_1 слични па важи да је $AD_1 : EF_1 = \sqrt{3} : 1$.

Тачан одговор је под **В**.

13. Са слике (sl. 92) видимо да можемо да посматрамо једнакокраки троугао $O_1O_2O_3$ који спаја центре кружница $k_1 : (O_1, 8)$, $k_2 : (O_2, 8)$ и $k_1 : (O_3, r)$. Из једнакокраког троугла $O_1O_2O_3$ добијамо да је $h^2 = (8+r)^2 - 8^2$ односно $h^2 = 16r + r^2$. А пошто трећи круг додирује њихову тангенту, важи да је $h + r = 8 \Rightarrow h = 8 - r$. Уврштавањем у прву једначину добијамо да је $(8-r)^2 = 16r + r^2$ што је еквивалентно $64 - 16r + r^2 = 16r + r^2$ тј. $32r = 64$. Одатле је решење $r = 2$.

Тачан одговор је под **Г**.



Сл. 92:

14. Задатак можемо решити тако што квадрирамо леву и десну страну и проверимо која решења добијене квадратне једначине задовољавају полазну једначину.

$$(2x-3)^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 = 3x - 2 \Leftrightarrow 4x^2 - 15x + 11 = 0.$$

Решења квадратне једначине су 1 и $\frac{11}{4}$. Непосредном провером одбацујемо прво решење.

Тачан одговор је под **В**.

15. Да би неједнакост важила за свако x неопходно је да коефицијент уз x^2 буде позитиван и да дискриминанта D буде негативна, тј. мора да

важи $m+1>0$ и $D=b^2-4ac=4(m+7)^2+4(m+1)(m+7)<0$, односно $m>-1$ и $4m^2+56m+196+4m^2+32m+28<0$. Друга неједначина је еквивалентна неједначини $8m^2+88m+224<0 \Leftrightarrow m^2+11m+28<0$. Решења добијене неједначине су $m \in (-7,-4)$. Међутим из прве неједначине имамо да је $m>-1$, па је добијени скуп решења њихов пресек зараво празан скуп.

Тачан одговор је под **Г**.

Пријемни испит 2015 - тест 4

1. Након сређивања израз $\left[\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3^3}\right)\right]^{-\frac{1}{3}}-\left[\frac{1}{2^2}-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^{-\frac{1}{3}}$ једнак је:

А) 2; Б) 3; В) одговор није понуђен; Г) 1; Д) $\frac{5}{24}$; Н) не знам.

2. Након сређивања израз $\frac{(a+b)^3-a(a^2+2ab+b^2)}{(a+b)(a-b)+2(ab+b^2)}+\frac{2b}{(a+b)^2-a^2-b^2}$, $a+b\neq 0 \wedge b\neq 0$ једнак је:

А) $a+b$; Б) $\frac{1}{a}+b$; В) $\frac{1}{a+b}$; Г) одговор није понуђен; Д) $\frac{1}{a}$; Н) не знам.

3. У развоју степена бинома $\left(\sqrt[5]{3}-\sqrt[3]{5}\right)^{2015}$ број чланова који су рационални је

А) 135; Б) 134; В) 402; Г) 403; Д) одговор није понуђен; Н) не знам.

4. Збир решења једначине $10\cdot 25^x-25\cdot 10^x+10\cdot 4^x=0$

А) одговор није понуђен; Б) 2; В) $\frac{1}{2}$; Г) -2; Д) 3; Н) не знам.

5. Ако је $f(4x+1)=x$ колико је $f(f(x))$?

А) $\frac{x-5}{16}$; Б) $\frac{x-10}{16}$; В) $\frac{x-20}{16}$; Г) одговор није понуђен; Д) $\frac{x+4}{16}$; Н) не знам.

6. Број решења једначине $\cos 3x=\cos x$ на интервалу $[-\pi,\pi)$ је:

А) 5; Б) 3; В) 1; Г) 4; Д) одговор није понуђен; Н) не знам.

7. Растућа аритметичка и геометријска прогресија имају исте прве и друге чланове. Ако је трећи члан геометријске прогресије 18 а трећи члан аритметичке прогресије 10, колики је збир прва два члана аритметичке прогресије?

А) 80; Б) 8; В) 16; Г) 32; Д) одговор није понуђен; Н) не знам.

8. Скуп решења неједначине за $\cos 2x>\sin x$ на интервалу $\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$је:

А) $\left(\frac{5\pi}{6},\frac{13\pi}{6}\right)$; Б) одговор није понуђен; В)$\left(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{13\pi}{6},\frac{5\pi}{2}\right)$; Г) $\left(\frac{13\pi}{6},\frac{5\pi}{2}\right)$; Д) $\left(\frac{5\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},\frac{13\pi}{6}\right)$; Н) не знам.

9. Цена чарапа порасла је за 100%, па након тога за 50%, а након тога, за још 25% и након тога се смањила за 20% после чега су коштале 192 динара. Колики је збир највише и најниже цене чарапа?

А) 256; Б) 368 ; В) 320; Г) 304; Д) одговор није понуђен; Н) не знам.

10. Вредност израза $4-\log_{14}2-\frac{1}{2}\log_{14}49+\log_{\frac{1}{3}}27$ је једнака:

А) 0; Б) 1; В) одговор није понуђен; Г) $\frac{2}{7}$; Д) $-\frac{2}{7}$; Н) не знам.

11. Два круга са центрима у тачкама O_1 и O_2 и полупречницима 3 и 4 де додирују. Њихова заједничка спољашња тангента их додирује у тачкама A и B. Површина четвороугла O_1O_2BA је:

А) одговор није понуђен; Б) $16\sqrt{3}$; В) $10\sqrt{3}$; Г) $7\sqrt{3}$; Д) $14\sqrt{3}$; Н) не знам.

12. У праву купу запремине 12π и површине попречног пресека 32 уписан је ваљак запремине $\frac{16\pi}{3}$.Однос висина купе и ваљка је:

А) $\sqrt{3}:1$; Б) одговор није понуђен; В) 2:1 ; Г) 3:1; Д) $\sqrt{6}:1$; Н) не знам.

13. Збир слободних коефицијената тангената на кружницу $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ које су нормалне на праву $x+y-17=0$ је:

А) $2-4\sqrt{2}$; Б) 2; В) $1-2\sqrt{2}$; Г) одговор није понуђен; Д) $1+2\sqrt{2}$; Н) не знам.

14. Скуп решења неједначине $\frac{(x+2)^2-1}{2x+3}\geq 1$ је подскуп од:

А) $[-2,-1]\cup[0,+\infty)$; Б) $\left[-3,-\frac{3}{2}\right]\cup(0,+\infty)$; В)$[-3,-2]\cup(-1,+\infty)$; Г) $[-3,-1]\cup(0,+\infty)$; Д) одговор није понуђен; Н) не знам.

15. Збир целобројних решења неједначине $||x-2|-3|<1$ је:

А) одговор није понуђен; Б) 8; В) 4 Г) 5; Д) 6; Н) не знам.

Решење:

1. Свођењем на заједничке именоце и даљим срећивањем добијамо

$$\left[\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3^3}\right)\right]^{-\frac{1}{3}}-\left[\frac{1}{2^2}-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^{-\frac{1}{3}}=$$
$$=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}\right)\right]^{-\frac{1}{3}}-\left[\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}\right]^{-\frac{1}{3}}=$$
$$=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3-1}{3^3}\right)\right]^{-\frac{1}{3}}-\left[\frac{2-1}{2^3}\right]^{-\frac{1}{3}}=$$
$$=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3^3}\right]^{-\frac{1}{3}}-\left[\frac{1}{2^3}\right]^{-\frac{1}{3}}=\left[\frac{1}{3^3}\right]^{-\frac{1}{3}}-\left[\frac{1}{2^3}\right]^{-\frac{1}{3}}=3-2=1.$$

Тачан одговор је под **Г**.

2. Срећивањем имениоца и бројиоца оба сабирка добијамо

$$\frac{(a+b)^3-a(a^2+2ab+b^2)}{(a+b)(a-b)+2(ab+b^2)}+\frac{2b}{(a+b)^2-a^2-b^2}=$$
$$=\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-a^3-2a^2b-ab^2}{a^2-b^2+2ab+2b^2}+\frac{2b}{a^2+2ab+b^2-a^2-b^2}=$$

$= \frac{a^2b+2ab^2+b^3}{a^2+b^2+2ab} + \frac{2b}{2ab} = \frac{b(a^2+2ab+b^2)}{a^2+b^2+2ab} + \frac{2b}{2ab} = b + \frac{1}{a}$,

ако је $a+b \neq 0$ и $b \neq 0$.

Тачан одговор је под **Б**.

3. Користећи Њутнову биномну формулу

$$\left(\sqrt[5]{3} - \sqrt[3]{5}\right)^{2015} = \sum_{i=0}^{2015} \binom{2015}{i} \left(\sqrt[5]{3}\right)^{2015-i} \cdot \left(-\sqrt[3]{5}\right)^{i},$$

добијамо да је општи члан

$$\tbinom{2015}{i} \left(3^{\frac{1}{5}}\right)^{2015-i} \cdot \left(-5^{\frac{1}{3}}\right)^{i} = \tbinom{2015}{i} 3^{\frac{2015-i}{5}} \cdot (-5)^{\frac{i}{3}} = \tbinom{2015}{i} 3^{503-\frac{i}{5}} \cdot (-5)^{\frac{i}{3}}.$$

Да би општи члан био рационалан неопходно је да i буде дељиво и са 3 и са 5. Будући да су 3 и 5 узајамно прости бројеви, i мора да буде дељиво са 15. Бројеви који су дељиви са 15 су 0, 15, 30, 45, ... , 1995, 2010. Колико бројева има, закључујемо из чињенице да је $\frac{2015}{15} = 134,3333...$, па је $2010 = 134 \cdot 15$, на основу чега закључујемо да бројева има 135 зато што узимамо у обзир и $i = 0$.

Тачан одговор је под **А**.

4. Поделимо једначину са 4^x и добићемо $10 \cdot \frac{25^x}{4^x} - 25 \cdot \frac{10^x}{4^x} + 10 = 0$ која је еквивалентна $10 \cdot \left[\left(\frac{5}{2}\right)^2\right]^x - 25 \cdot \left(\frac{10}{4}\right)^x + 10 = 0$ тј. $10 \cdot \left[\left(\frac{5}{2}\right)^2\right]^x - 25 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x + 10 = 0$. Увођењем смене $\left(\frac{5}{2}\right)^x = t$ добијамо квадратну једначину $10t^2 - 25t + 10 = 0$ чија су решења $t = 2$ и $t = \frac{1}{2}$. Ако вратимо смену добијамо једначине $\left(\frac{5}{2}\right)^x = 2$ и $\left(\frac{5}{2}\right)^x = \frac{1}{2}$ чија су решења $x = \log_{\frac{5}{2}} 2$ и $x = \log_{\frac{5}{2}} \frac{1}{2}$. Збир решења је $\log_{\frac{5}{2}} 2 + \log_{\frac{5}{2}} \frac{1}{2} = \log_{\frac{5}{2}} 2 + \log_{\frac{5}{2}} 2^{-1} = 0$.

Тачан одговор је под **А**.

5. Ако је $f(4x+1) = x$ можемо да уведемо смену $4x+1 = t$. Претходна једнакост је еквивалентна $x = \frac{t-1}{4}$ и тада је $f(t) = \frac{t-1}{4}$. Одавде важи да је $f(f(t)) = f(\frac{t-1}{4}) = \frac{\frac{t-1}{4}-1}{4} = \frac{\frac{t-1}{4}-\frac{4}{4}}{4} = \frac{\frac{t-5}{4}}{4} = \frac{t-5}{16}$.

Тачан одговор је под **А**.

6. Задатак можемо решити на неколико начина. Један начин је геометријски, а ми ћемо задатак решити користећи тригонометријске једнакости,

$$
\begin{aligned}
\cos 3x-\cos x=0 \quad &\Leftrightarrow \quad -2\sin\frac{3x+x}{2}\sin\frac{3x-x}{2}=0\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \quad 2\sin 2x\sin x=0\Leftrightarrow 2\cdot 2\sin x\cos x\sin x=0\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \quad \cos x(4\sin^2 x)=0\Leftrightarrow\left[\cos x=0\vee 4\sin^2 x=0\right]\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \quad \left[\cos x=0\vee \sin^2 x=0\right]\Leftrightarrow\left[\cos x=0\vee \sin x=0\right].
\end{aligned}
$$

На интервалу $[-\pi,\pi)$ једначина $\cos x=0$ има решења за $x=\frac{\pi}{2}$ и $x=-\frac{\pi}{2}$, а једначина $\sin x=0$ има решења у $x=-\pi$ и $x=0$.

Тачан одговор је под **Г**.

7. Према поставци задатка $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, трећи члан аритметичке прогресије је $a_3=10$, а трећи члан геометријске прогресије је $b_3=18$. Како је $a_3=a_1+2d=10$ одакле је $a_1+2(a_2-a_1)=10$ тј. $-a_1+2a_2=10$ i $b_3=b_1q^2=a_1q^2=a_1\cdot\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2=\frac{a_2^2}{a_1}=18$. Одавде добијамо систем једначина

$$
\begin{cases} -a_1+2a_2=10\\ a_2^2=18a_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -a_1+2a_2=10\\ a_2^2=18(2a_2-10)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -a_1+2a_2=10\\ a_2^2-36a_2+180=0\end{cases}.
$$

Решавајући другу једначину добијамо решења $a_2=6$ и $a_2=30$. Уврштавањем у прву једначину добијамо да је $a_1=2$ односно $a_1=50$. Тиме смо добили два решења $a_1=2$, $a_2=6$ и $a_1=50$, $a_2=30$, при чему одбацујемо друго зато што је у поставци задатка било тражено да је артиметички низ растућ. Одатле је збир прва два члана аритметичке прогресије једнак 8.

Тачан одговор је под **Б**.

8. Полазна неједначина је еквивалентна $\cos^2 x-\sin^2 x>\sin x$ тј. $1-\sin^2 x-\sin^2 x>\sin x$, одакле добијамо $1-2\sin^2 x>\sin x$ тј. $0>2\sin^2 x+\sin x-1$. Увођењем смене $\sin x=t$ добијамо квадратну неједначину $2t^2+t-1<0$ чији је скуп решења $-1<t<\frac{1}{2}$. Враћањем смене добијамо $-1<\sin x<\frac{1}{2}$. Решење добијене неједначине је

$$
\left(\tfrac{5\pi}{6}+2k\pi,\tfrac{3\pi}{2}+2k\pi\right)\cup\left(\tfrac{3\pi}{2}+2k\pi,\tfrac{13\pi}{6}+2k\pi\right).
$$

У пресеку добијеног решења са условом задатка $\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$ добијамо да је $x\in\left(\frac{5\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},\frac{13\pi}{6}\right)$.

Тачан одговор је под **Д**.

9. Нека је почетна цена чарапа x. Након првог поскупљења цена је $x + \frac{100}{100}x = 2x$, након другог поскупљења цена је $2x + \frac{50}{100}2x = 3x$, након трећег поскупљења је $3x + \frac{25}{100}3x = 3,75x$. Након појефтињења добијамо да је $3,75x - \frac{20}{100}3,75x = 3,75x - 0,75x = 3x = 192$. Одатле закључујемо да је почетна цена $x = \frac{192}{3} = 64$ која је и најнижа а највиша је $3,75 \cdot 64 = 240$. Збир највише и најниже је 304.

Тачан одговор је под **Г**.

10. Сређивањем израза добијамо

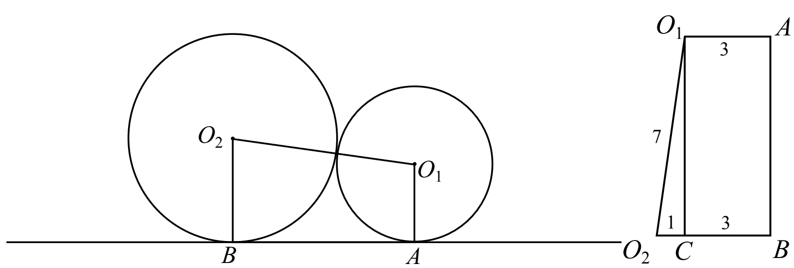
$$\begin{aligned}
&4 - \log_{14} 2 - \tfrac{1}{2}\log_{14} 49 + \log_{\frac{1}{3}} 27 = \\
&\quad = 4 - \log_{14} 2 - \log_{14} 49^{\frac{1}{2}} + \log_{\frac{1}{3}} \left(\tfrac{1}{3}\right)^{-3} = \\
&\quad = 4 - \log_{14} 2 - \log_{14} 7 - 3 = \\
&\quad = 4 - \log_{14} 14 - 3 = 4 - 1 - 3 = 0.
\end{aligned}$$

Тачан одговор је под **А**.

11. Са слике 93 видимо да тачке O_1, O_2, B, A образују трапез. Да би смо одредили површину трапеза неопходно је да пронађемо висину. Висину проналазимо из чињенице да је троугао O_1CO_2 правоугли и да је $CO_2 = 1$ можемо применити Питагорину теорему

$$h = O_1C = \sqrt{(O_1O_2)^2 - (CO_2)^2} = \sqrt{7^2 - 1^2} = 4\sqrt{3}.$$

Пошто смо израчунали висину, можемо израчунати и површину као $P = \frac{BO_2 + AO_1}{2} \cdot h = \frac{4+3}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 14\sqrt{3}$.

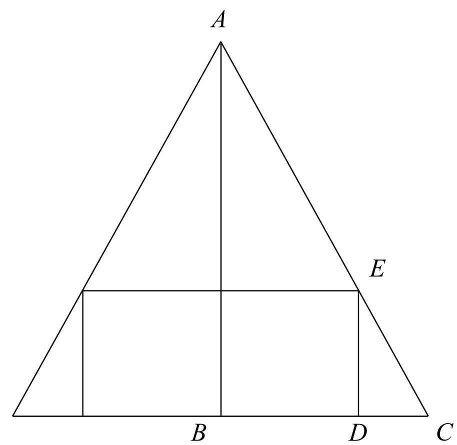


Сл. 93:

Тачан одговор је под **Д**.

12. Запремина купе је $V = \frac{1}{3}r^2\pi \cdot H = 12\pi$ па је $r^2H = 36$. Површина попречног пресека купе је $P = r \cdot H = 32$. Ако поделимо прву једначину другом добићемо да је $\frac{r^2H}{rH} = \frac{36}{32} \Leftrightarrow r = \frac{9}{8} \Rightarrow H = 32 \cdot \frac{8}{9} = \frac{256}{9}$. Ако

посматрамо попречни пресек купе и уписаног ваљка (сл. 94) видимо да важи сличност троуглова ABC и EDC и да је $H = AB$, $BD = r_1$, $BC = r$, $ED = H_1$ где су r_1 и H_1 полупречник основе и висина уписног ваљка, а r и H полупречинк основе и висина купе. Због сличности троуглова важи да је $H : H_1 = r : (r - r_1)$. Како је запремина уписаног ваљка $\frac{16\pi}{3} = r_1^2\pi H_1$, то је $r_1^2 H_1 = \frac{16}{3}$, тј. $H_1 = \frac{16}{3r_1^2}$. Ако то заменимо у пропорцију добијамо $\frac{\frac{256}{9}}{\frac{16}{3r_1^2}} = \frac{\frac{9}{8}}{\frac{9}{8} - r_1}$. Одатле $128r_1^3 - 144r_1^2 + 27 = 0$. Решења кубне једначине тражимо применом Вијетових формула. кандидати за нулу су делиоци $\frac{27}{128}$, па лако проналазимо да су нуле полинома $\frac{3}{4}$ и $-\frac{3}{8}$. Друго решење одбацујемо, па је $\frac{H}{H_1} = \frac{\frac{9}{8}}{\frac{9}{8} - \frac{3}{4}} = \frac{\frac{9}{8}}{\frac{9}{8} - \frac{6}{8}} = \frac{\frac{9}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{3}{1}$.



Сл. 94:

Тачно решење је под **Г**.

13. Напишимо прво једначину нормале на праву $x + y - 17 = 0$. Треба одредити параметар n у једначини нормале $y = x + n$ тако да нормала додирује кружницу. Услов да права $y = kx + n$ буде тангента кружнице $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ је $r^2(1+k^2) = (kp - q + n)^2$. Одатле добијамо да је $4(1+1) = (1 \cdot 2 - 3 + n)^2 \Leftrightarrow 8 = (n-1)^2 \Leftrightarrow n_{1,2} = \pm 2\sqrt{2} + 1$. Одавде је $n_1 + n_2 = 2$.

Тачно решење је под **Б**.

14. Полазна неједначина је еквивалентна $\frac{x^2+4x+4-1}{2x+3} - \frac{2x+3}{2x+3} \geq 0$ тј. $\frac{x^2+2x}{2x+3} \geq 0$. Претходну неједначину можемо записати као $\frac{x(x+2)}{2(x+\frac{3}{2})} \geq 0$. Скуп решења добијене неједначине је $[-2, -\frac{3}{2}) \cup [0, +\infty)$.

Тачно решење је под **A**.

15. Полазна неједначина је еквивалентна $-1 < |x-2| - 3 < 1$ тј. $2 < |x-2| < 4$. Из претходног добијамо $2 < x-2 < 4 \vee -4 < x-2 < -2$ што је еквивалентно $4 < x < 6 \vee 0 > x > -2$. Одавде следи да су целобројна решења 5 и -1 а њихов збир 4.

Тачно решење је под **B**.

Пријемни испит 2015 - тест 5

1. Вредност израза $\left[\left(3-\frac{3}{7}\right)^{-1}:\frac{1}{3}+\frac{2}{3\cdot\sqrt{(-2)^2}}\right]^{-0.5}\cdot\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}-0.25\right]^{\frac{1}{2}}$ је:

А) $\frac{\sqrt{6}}{5}$; Б) $\frac{5}{\sqrt{6}}$; В) одговор није понуђен; Г) 1; Д) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; Н) не знам.

2. За реалне бројеве a и b , такве да је $|a|\neq|b|$ и $ab\neq 0$, вредност израза $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^{-1}:\frac{ab}{a^3+b^3}+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^{-1}\cdot(a-b)$ индентички је једнака изразу:

А) $(b-a)^2$; Б) a^2+b^2; В) $\frac{a+b}{ab}$; Г) одговор није понуђен; Д) ; Н) не знам.

3. Збир свих целобројних решења неједначине $\frac{2x^2-1}{x^2-4x-5}\leq 1$ је:

А) 10; Б) 12; В) 14; Г) 13; Д) одговор није понуђен; Н) не знам.

4. Збир првог и другог члана растуће геометријске прогресије је девет пута мањи од збира трећег и четвртог члана. Ако је први члан те прогресије једнак 3^{-2015}, онда је 2015−ти члан те прогресије једнак:

А) одговор није понуђен; Б) 3; В) $\frac{1}{3}$; Г) 1; Д) $\frac{1}{27}$; Н) не знам.

5. Производ свих целобројних решења неједначине $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x-3)>\log_{\frac{1}{2}}(x+3)$ је:

А) 24; Б) 120; В) 60; Г) одговор није понуђен; Д) 20; Н) не знам.

6. Производ свих реалних решења једначине $5^{x^2}-3^{x^2-1}=3^{x^2+1}-5^{x^2-1}$ је:

А) -1; Б) $-\sqrt{2}$; В) $-\sqrt{3}$; Г) одговор није понуђен; Д) $\sqrt{2}$; Н) не знам.

7. Дужина основице AB једнакокраког троугла ABC једнака је $2\sqrt{3}cm$, а угао на основици једнак је 30. У троугао је уписан правоугаоник $MNPQ$ максималне површине тако да $M,N\in AB$. Површина тог правоугаоника (у cm^2) је:

А) одговор није понуђен; Б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; В) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; Г) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; Д) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; Н) не знам.

8. Вредност реалног параметра b за коју решења x_1 и x_2 једначине $x^2-x+b^2-1=0$ задовољавају услов $x_1^3+x_2^3=4$ није елемент скупа:

А) $\{-1,0,1\}$; Б) $\{-1,1,2\}$; В) $\{0,1,2\}$; Г) одговор није понуђен; Д) $\{-1,0,2\}$; Н) не знам.

9. Запремина правилне четворостране пирамиде чија је основна ивица је $8cm$, а висина за $1cm$ краћа од висине бочне стране, (у cm^3) је:

А) 480; Б) 320; В) 160; Г) 240; Д) одговор није понуђен; Н) не знам.

10. Дата је једначина $\sin 5x - \sin x + 3\cos 3x = 0$. Збир квадрата најмањег позитивног и највећег негативног решења те једначине је:

А) одговор није понуђен; Б) $\frac{2\pi^2}{9}$; В) $\frac{\pi^2}{18}$; Г) $\frac{5\pi^2}{18}$; Д) $\frac{13\pi^2}{16}$; Н) не знам.

11. Вредност израза $\frac{6\sin 325 \cdot \sin 305}{\cos 380}$ је:

А) одговор није понуђен; Б) 3; В) $3\sqrt{3}$; Г) 6; Д) 1; Н) не знам.

12. Дате су тачке $A(7,-1)$, $B(2,3)$ и права $p:\ 4x+y=1$. Једначина праве која садржи средиште дужи AB и паралелна је са p је:

А) $4x+y=11$; Б) $4x+y=27$; В) $8x+2y=11$; Г) одговор није понуђен; Д) $4x+y=19$; Н) не знам.

13. Збир свих вредности $a \in R$ за које права $x-y+3=0$ додирује кружницу $x^2+y^2-2x-2ay-13=0$ једнак је:

А) -8; Б) -4; В) 4; Г) одговор није понуђен; Д) 8; Н) не знам.

14. Ако је $f\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \frac{2x+1}{x+2}$,где $x \in R \setminus \{-2,1\}$,онда је $f(x-1)$ једнако:

А) $\frac{x-1}{x+2}$; Б) одговор није понуђен; В) $\frac{x+2}{x-1}$; Г) $\frac{x}{x-1}$; Д) $\frac{1}{(x-1)(x+2)}$; Н) не знам.

15. Ако је $z = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{11}$, где је $i^2=-1$, онда је вредност израза $z+\overline{z}$ једнака:

А) $-\sqrt{2}$; Б) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; В) 0; Г) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; Д) одговор није понуђен; Н) не знам.

Решење:

1. Свођењем на заједничке имениоце и даљим сређивањем добијамо једнакости

$$\left[\left(3-\tfrac{3}{7}\right)^{-1}:\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{3\cdot\sqrt{(-2)^2}}\right]^{-0.5}\cdot\left[\left(\tfrac{2}{5}\right)^{-2}-0.25\right]^{\frac{1}{2}}=$$
$$=\left[\left(\tfrac{18}{7}\right)^{-1}\cdot 3+\tfrac{2}{3\cdot 2}\right]^{-0.5}\cdot\left[\tfrac{25}{4}-\tfrac{1}{4}\right]^{\frac{1}{2}}=$$
$$=\left[\tfrac{7}{18}\cdot 3+\tfrac{1}{3}\right]^{-0.5}\cdot\sqrt{6}=\left[\tfrac{7}{6}+\tfrac{2}{6}\right]^{-0.5}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{\tfrac{6}{9}}\cdot\sqrt{6}=2.$$

Тачно решење је под **В**.

2. Свођењем на заједничке имениоце и даљим сређивањем добијамо једнакости

$$\left(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}\right)^{-1}:\tfrac{ab}{a^3+b^3}+\left(\tfrac{1}{a}-\tfrac{1}{b}\right)^{-1}\cdot(a-b)=$$
$$=\left(\tfrac{b+a}{ab}\right)^{-1}\cdot\tfrac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{ab}+\left(\tfrac{b-a}{ab}\right)^{-1}\cdot(a-b)=$$
$$=\tfrac{ab}{a+b}\cdot\tfrac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{ab}+\tfrac{ab}{b-a}\cdot(a-b)=$$
$$=a^2-ab+b^2-ab=(a-b)^2.$$

Тачно решење је под **А.**

3. Из полазне неједначине важи $\frac{2x^2-1}{x^2-4x-5}-1\leq 0$ тј. $\frac{2x^2-1-x^2+4x+5}{x^2-4x-5}\leq 0$ одакле добијамо да је $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4x-5}\leq 0$. Пошто је $x^2+4x+4\geq 0$ онда мора $x=-2\vee x^2-4x-5<0$ одакле је $x\in\{-2\}\cup(-1,5)$. Збир целобројних решења је $-2+0+1+2+3+4=8$.

Тачно решење је под **Д**.

4. Из поставке задатка важи да је $9(a_1+a_2)=a_3+a_4$. Заменом добијамо $9a_1(1+q)=a_1q^2(1+q)$, а након скраћивања $q^2=9$, како се ради о растућем геометријском низу имамо да је $q=3$. Тада је $a_{2015}=a_1\cdot q^{2014}=3^{-2015}\cdot 3^{2014}=\frac{1}{3}$.

Тачно решење је под **В**.

5. Услови задатка су $x-3>0$ и $x+3>0$ па је $x>3$. Сређивањем неједначине добијамо $\log_{2^{-\frac{1}{2}}}(x-3)>\log_{2^{-1}}(x+3)$, односно важи да је $-2\log_2(x-3)>-\log_2(x+3)$, па је $\log_2(x-3)^2<\log_2(x+3)$. Из претходног мора да важи да је $(x-3)^2<x+3$ тј. $x^2-7x+6<0$. Решења претходне неједначине су $x\in(1,6)$. Када додамо услов задатка добијамо решење $x\in(3,6)$. Производ целобројних решења је $4\cdot 5=20$.

Тачно решење је под **Д**.

6. Сређивањем израза добијамо да важе еквиваленције

$$5^{x^2}-3^{x^2-1}=3^{x^2+1}-5^{x^2-1}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5^{x^2}+\tfrac{1}{5}\cdot 5^{x^2}=3\cdot 3^{x^2}+\tfrac{1}{3}\cdot 3^{x^2}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \frac{6}{5} \cdot 5^{x^2} = \frac{10}{3} \cdot 3^{x^2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{x^2} = \frac{25}{9} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2},$

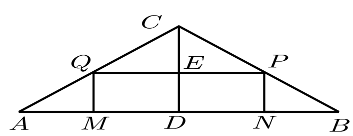
па је производ реалних решења једнак $-\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = -2$.
Тачно решење је под **Г**.

7. Висина троугла је 1 јер је угао на основици 30° (троугао ACD (сл. 95) је пола једнакостраничног троугла висине $AD = \sqrt{3}$). Из сличности троугла имамо $\frac{AB}{CD} = \frac{QP}{CE}$ па је $MN = QP = 2\sqrt{3} \cdot CE = 2\sqrt{3} \cdot (1-x)$, нека је $MQ = x$.

Површина правоугаоника је

$$P = MN \cdot MQ = 2\sqrt{3} \cdot (1-x)x = 2\sqrt{3}(x - x^2) = 2\sqrt{3}\left(\tfrac{1}{4} - (x - \tfrac{1}{2})^2\right).$$

Из претходне једначине је $P_{MAX} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ када је $x = \frac{1}{2}$ (теме параболе).



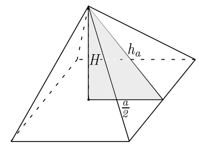
Сл. 95:

Тачно решење је под **Б**.

8. По Вијетовим формулама имамо $x_1 + x_2 = 1$ и $x_1 \cdot x_2 = b^2 - 1$. Тражимо да је $x_1^3 + x_2^3 = 4$, односно да је $(x_1+x_2)(x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + x_2^2) = 4$, tj. $(x_1+x_2)((x_1+x_2)^2 - 3x_1 \cdot x_2) = 4$ па заменом добијамо $1 \cdot (1 - 3(b^2-1)) = 4$ и добијамо да је $b = 0$.
Тачно решење је под **Б**.

9. По задатку (сл. 96) имамо $h_a = H + 1$, па по Питагориној теореми добијамо $h_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + H^2$, односно $H^2 + 2H + 1 = 16 + H^2$ па је $H = \frac{15}{2} cm$. Запремина је $V = \frac{1}{3} H \cdot B = \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{2} \cdot 64 = 160\, cm^3$.
Тачно решење је под **В**.

10. Претварањем разлике синуса у производ добијамо да важи једнакост $2\sin 2x \cdot \cos 3x + 3\cos 3x = 0$, па је $\cos 3x \cdot (2\sin 2x + 3) = 0$. Одавде мора $\cos 3x = 0$, јер је увек $2\sin 2x + 3 \geq 1$, па је $3x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$, односно $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$. Тада је тражени збир једнак $\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + \left(-\frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{\pi^2}{18}$.
Тачно решење је под **В**.



Сл. 96:

11. Свођењем углова на углове из првог квадранта добијамо једнакости

$$\frac{6\sin 325\cdot\sin 305}{\cos 380} = \frac{6\sin(360-35)\cdot\sin(270+35)}{\cos(360+20)} =$$
$$= \frac{6(-\sin 35)\cdot(-\cos 35)}{\cos 20} = \frac{3\sin 70}{\cos(90-70)} = \frac{3\sin 70}{\sin 70} = 3.$$

Тачно решење је под **Б**.

12. Координате средишта S дужи AB добијамо из формула по којима је $x_S = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{7+2}{2} = \frac{9}{2}$, $y_S = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1$, па је $S(\frac{9}{2}, 1)$. Све праве паралелне правој p имају једначину облика $4x+y = a$. Убацивањем тачке S у једначину добијамо да је $a = 19$, па је тражена права $4x + y = 19$.

Тачно решење је под **Д**.

13. Канонски облик кружнице је $(x-1)^2 + (y-a)^2 = 14 + a^2$, па за центар важи $p = 1$, $q = a$ и полупречник $r = \sqrt{14 + a^2}$. Експлицитни облик праве је $y = x + 3$, па су $k = 1$ и $n = 3$. Услов додира је $(k \cdot p - q + n)^2 = r^2(k^2 + 1)$, па заменом добијамо $(4-a)^2 = 2(a^2 + 14)$, а одатле је $a^2 + 8a + 12 = 0$. Збир свих вредности је $-2 + (-6) = -8$.

Тачно решење је под **А**.

14. $f\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \frac{2x+1}{x+2}$, сменом$\frac{x+2}{x-1} = t$ добијамо да је $x = \frac{t+2}{t-1}$, а одатле $f(t) = \frac{2\frac{t+2}{t-1}+1}{\frac{t+2}{t-1}+2} = \frac{3t+3}{3t} = \frac{t+1}{t}$ па је $f(x-1) = \frac{x}{x-1}$.

Тачно решење је под **Г**.

15. Записивањем степена преко петог степена квадрата добијамо да важе једнакости

$$z = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{11} = \left(\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^5 \cdot \frac{1-i}{\sqrt{2}} =$$
$$= \left(\frac{1-2i+i^2}{2}\right)^5 \cdot \frac{1-i}{\sqrt{2}} = (-i)^5 \cdot \frac{1-i}{\sqrt{2}} = -i \cdot \frac{1-i}{\sqrt{2}} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}},$$

па је тада $z + \overline{z} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}} + \frac{-1+i}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$.

Тачно решење је под **А**.

18 ЛИТЕРАТУРА

[1] Ж. Ивановић, С. Огњановић: МАТЕМАТИКА 1, збирка задатака и тестова за I разред гимназија и техничких школа. Круг, Београд, 2011.

[2] Ж. Ивановић, С Огњановић: МАТЕМАТИКА 2, збирка задатака и тестова за II разред гимназија и техничких школа. Круг, Београд, 2011.

[3] Ж. Ивановић, С. Огњановић: МАТЕМАТИКА 3, збирка задатака и тестова за III разред гимназија и техничких школа. Круг, Београд, 2012.

[4] Ж. Ивановић, С. Огњановић: МАТЕМАТИКА 4, збирка задатака и тестова за VI разред гимназија и техничких школа. Круг, Београд, 2013.

[5] В. Богославов: Збирка решених задатака из Математике 1.Завод за уџбенике, Београд, 2011.

[6] В. Богославов: Збирка решених задатака из Математике 2.Завод за уџбенике, Београд, 2011.

[7] В. Богославов: Збирка решених задатака из Математике 3.Завод за уџбенике, Београд, 2011.

[8] В .Богославов: Збирка решених задатака из Математике 4.Завод за уџбенике, Београд, 2013.